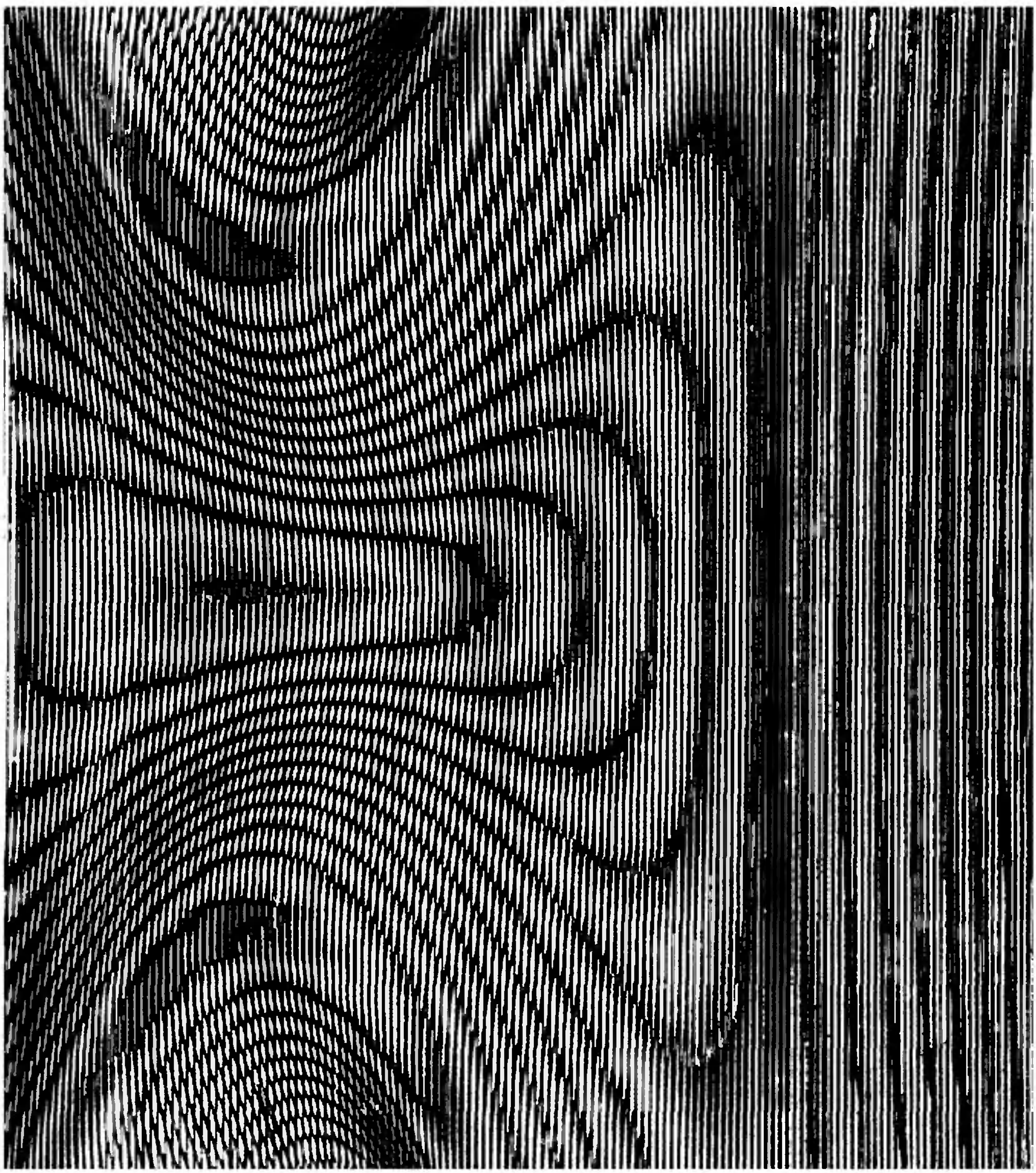
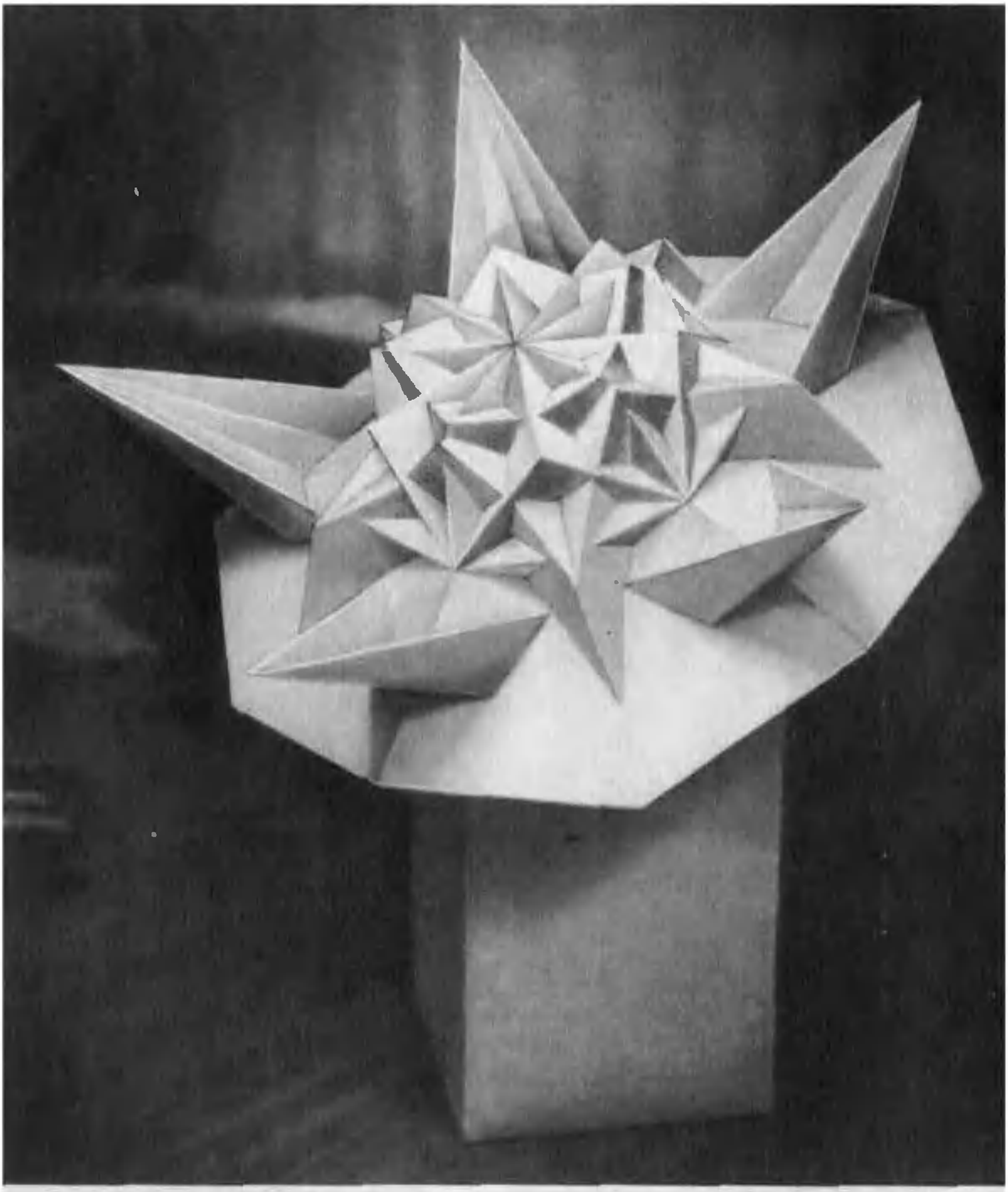
ISSN 0130-2221

Квант

4
1979

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Эта «летающая тарелка» — близкий родственник многогранника, модель которого была показана на второй странице обложки «Кванта» № 1. Подробнее см. четвертую страницу обложки этого номера.

В. Гамаюнов

Красивый муаровый узор на первой странице обложки получен с помощью ЭВМ.
Муаровые узоры возникают при наложении двух семейств линий, каждое из которых содержит близко расположенные непересекающиеся линии. При наложении линии двух семейств должны пересекаться под небольшими углами. Тогда расстояние между полосами будет существенно больше расстояний между линиями семейства. В этих условиях от небольшого смещения линий одного из семейств положение полос узора может сильно измениться. Поэтому вычертить вручную муаровый узор очень сложно. Для этой цели лучше применить ЭВМ и управляемый от нее графопостроитель.
Воспроизведенный на обложке узор выполнен системой графического отображения АЛГРАФ. Одно из семейств линий — параллельные равномерно расположенные прямые, другое — дуги синусоид, амплитуда и длина волны которых меняются по квадратичному закону.

Ю. Котов

Основан в 1970 году

Квант

4
1979

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Красивый муаровый узор на первой странице обложки получен с помощью ЭВМ по программе, составленной Ю. Котовым.

Международные космические экипажи

2 марта 1977 года навсегда войдет знаменательной датой в историю космонавтики. В этот день впервые на корабле «Союз-28» на космическую орбиту был выведен международный экипаж, состоящий из командира корабля летчика-космонавта СССР Героя Советского Союза Алексея Губарева и космонавта-исследователя гражданина ЧССР Владимира Ремека.

Запуском корабля «Союз-28» открылся новый этап в исследовании и использовании космического пространства в мирных целях, проводимых социалистическими странами по программе сотрудничества «Интеркосмос».

Программа полета первого международного экипажа космонавтов была весьма насыщенной — она предусматривала стыковку корабля «Союз-28» с орбитальным научно-исследовательским комплексом «Салют-6» — «Союз-27», пилотируемым космонавтами Ю. Романенко и Г. Гречко, и проведение на борту станции совместных исследований и экспериментов.

17 июня 1978 года в Советском Союзе был осуществлен запуск космического корабля «Союз-30», на борту которого находился второй международный экипаж в составе командира корабля дважды Героя Советского Союза летчика-космонавта СССР Петра Климука и космонавта - исследователя гражданина ПНР Мирослава Гермашевского.

Программа полета предусматривала стыковку с орбитальным научно-исследовательским комплексом «Салют-6» — «Союз-29», пилотируемым космонавтами В. Ковалёнком и А. Иванченковым, и проведение на борту станции совместных исследований и экспериментов.

26 августа 1978 года был осуществлен запуск космического корабля «Союз-31», пилотируемого третьим международным экипажем в составе командира корабля дважды Героя Советского Союза летчика-космонавта СССР Валерия Быковского и космонавта-исследователя гражданина ГДР Зигмунда Иена.

Программа полета предусматривала стыковку с орбитальным комплексом «Салют-6» — «Союз-29» и продолжение совместно с Ковалёнко и Иванченковым исследований и экспериментов, начатых предыдущими экипажами.

Идея международных полетов космонавтов социалистических стран по программе «Интеркосмос» была выдвинута Советским Союзом еще в 1976 году. В июле и сентябре в Москве состоялось совещание представителей НРБ, ВНР, ГДР, ПНР, республики Куба, МНР, СРР, СССР и ЧССР, на которых были обсуждены организационные вопросы, связанные с подготовкой к международным пилотируемым космическим полетам. В конце 1976 года в Москву прибы-

В. Ремек (ЧССР), А. Губарев (СССР) на одной из тренировок.

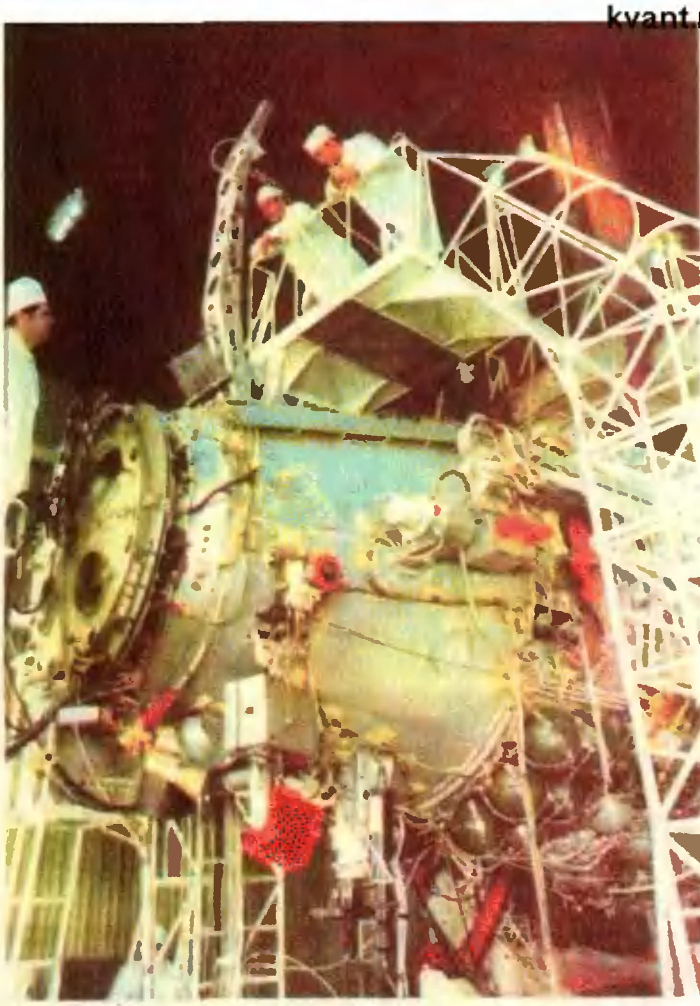
А. Иванченков, В. Коваленок (СССР) в Центре подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина.

ла первая группа кандидатов в космонавты — граждан ЧССР, ПНР и ГДР — и уже в декабре 1976 года они приступили к тренировкам и занятиям в Центре подготовки космонавтов имени Ю. А. Гагарина. Дружеская товарищеская помощь опытных советских специалистов и космонавтов позволила им в кратчайшие сроки получить необходимые теоретические и практические знания.

Эксперименты, проводимые в рамках этой программы, весьма обширны. Они ведутся в русле таких важных направлений, как космическая физика, дистанционное зондирование Земли, космическая технология, космическая биология и медицина.

В настоящее время в Центре подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина тренируются кандидаты в космонавты — граждане НРБ, ВНР, МНР, республики Куба и СРР, которые до 1983 года также совершат полеты на советских кораблях.

М. Смолянский
Фото А. Моклецова



А. Губарев (СССР), О. Пельчак, В. Ремек (ЧССР) у орбитальной станции «Салют-6».

Экипаж «Союз-30» П. Климук (СССР) и М. Гермашевский (ПНР) в Центре подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина на одной из тренировок.

В. Быковский (СССР), З. Иен (ГДР) в Центре подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина на одной из тренировок.

Г. Балк, М. Балк, В. Болтянский

Метод малых шевелений

При испытании геометрических высказываний на правдоподобие, при поиске контрпримеров математик нередко рассуждает так:

— Возьму случай, когда высказывание подтверждается, и «пошевелю» одну точку (или отрезок, или какое-либо другое множество точек). Не могу ли я таким способом получить такой случай, когда высказывание не подтверждается?

Рассмотрим простой пример:

Задача 1. *Из точки P, расположенной внутри выпуклого многоугольника, опускаются перпендикуляры на его стороны или на их продолжения. Условимся основание такого перпендикуляра называть «приятным», если оно принадлежит стороне, и «неприятным» в противном случае. Верно ли, что всякая внутренняя точка любого многоугольника имеет по крайней мере две приятные проекции?*

Решение. Возьмем сначала в качестве искомого выпуклого многоугольника треугольник ABC. Если он остроугольный, то все проекции любой его внутренней точки — приятные. Пусть ΔABC тупоугольный. В этом случае внутри него легко выбрать такую точку P, у которой будут две приятные проекции (рис. 1). Теперь нетрудно построить выпуклый четырехугольник и точку, лежащую на его контуре, так, чтобы эта точка имела только одну приятную проекцию. Таков, например, четырехугольник $MNCB$ на рисунке 2 (MN — любая прямая, оставляющая снаружи проекции A', B', C'). Точка P на его контуре имеет одну приятную проецию (этой проекцией будет сама точка P). Но точка P не лежит внутри многоугольника $MNCB$. Поэтому «пошевелим» точку P — сдвинем ее немного внутрь четырехугольника. При малом «шевелении» точки P мало пошевелятся и ее проекции. Поэтому при достаточно малом шевелении те проекции, которые были неприятными до шевеления точки P, останутся такими и после шевеления. Значит, после шевеления точки P мы получим внутри четырехугольника точку P', у которой будет ровно одна приятная проекция (а именно — проекция на сторону MN).

Задача 2. *Известно, что в каждом треугольнике три высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Верно ли аналогичное утверждение для тетраэдра: «все высоты любого тетраэдра (или их продолжения) имеют общую точку»?*

Решение. Возьмем произвольный тетраэдр $ABCD$ и проведем в нем высоты AM и DN (рис. 3). Теперь пошевелим этот тетраэдр, сдвинув вершину D в положение D', находящееся, однако, в плоскости BCD. В новом тетраэдре $ABCD'$ высота AM та же (поскольку плоскости BCD и BCD' совпадают), т. е. эта высота «выдерживает» шевеление точки D в плоскости BCD. В то же время высота $D'N'$ нового тетраэдра может сместиться в любое положение, параллельное DN (и достаточно близ-

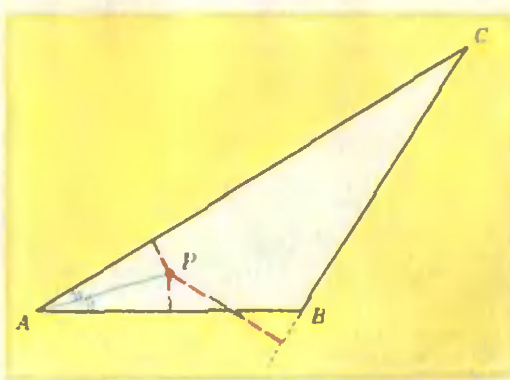


Рис. 1.

кое к DN). Ясно теперь, что за счет шевеления точки D можно получить тетраэдр, в котором высоты AM и $D'N'$ не имеют общих точек (даже если в первоначальном тетраэдре высоты AM и DN пересекались). Значит, утверждение, аналогичное теореме о трех высотах треугольника, для произвольного тетраэдра неверно.

Задача 3. *Существует ли выпуклый ограниченный многогранник, ортогональная проекция которого на любую плоскость является 1979-угольником?* (От редакции. Эту задачу прислал наш читатель из Новосибирска А. Кузьминых.)

Предположим, что такой многогранник существует. Вместо того, чтобы проектировать этот многогранник на всевозможные плоскости, нам будет удобнее, придавая ему всевозможные положения в пространстве, проектировать его на фиксированную плоскость α.

Расположим наш многогранник так, чтобы одно из его ребер — скажем, A_1A_2 — было перпендикулярно плоскости α. При проектировании его в этом положении вершины A_1, A_2 перейдут в одну и ту же вершину P_1 некоторого 1979-угольника $P_1P_2 \ldots P_{1979}$.

Пошевелим многогранник так, чтобы ребро A_1A_2 перестало быть перпендикулярным плоскости α и вершины A_1 и A_2 спроектировались в две разные вершины многоугольника проекции. Если это шевеление сделать достаточно малым, то различные вершины P_i, P_j останутся вершинами (не уйдут «внутрь»), причем различными. Таким образом, в новом положении наш многогранник спроектируется по крайней мере в 1980-угольник. Противоречие!

Следовательно, искомого многогранника не существует.

На этих простых примерах уже видна суть применяемого здесь приема *«малых шевелений»*. *Свойства геометрических объектов распадаются на два типа: устойчивые* — сохраняющиеся при всех (достаточно малых) шевелениях фигуры, и *неустойчивые* — разрушающиеся при некотором малом шевелении. Так, в задаче 1 свойство «проектироваться на продолжение стороны» устойчиво, а свойство «находиться на контуре многоугольника» неустойчиво. В третьей задаче свойство «проекции двух вершин многогранника различны» устойчиво, в то время как свойство «проекции двух вершин многогранника совпадают» неустойчиво. Самостоятельно установите, какие свойства устойчивы и какие неустойчивы в задаче 2.

Поэтому, если мы ищем фигуру, обладающую некоторым набором свойств, то мы сначала добиваемся выполнения нужных устойчивых свойств, а затем подходящим малым шевелением устраняем ненужные нам неустойчивые свойства.

Решим теперь более сложную задачу:

Задача 4. *Можно ли в правильном тетраэдре просверлить сквозное отверстие (не обязательно круглое), через которое может пройти такой же тетраэдр?*

Решим сначала родственную математическую задачу:

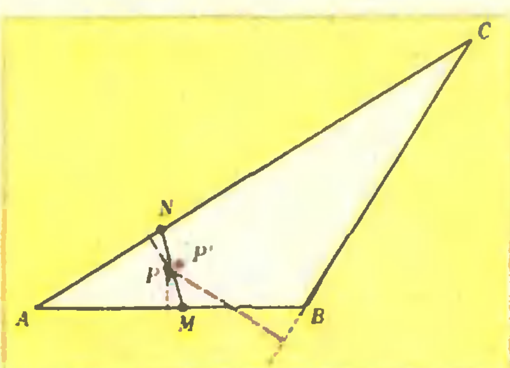


Рис. 2.

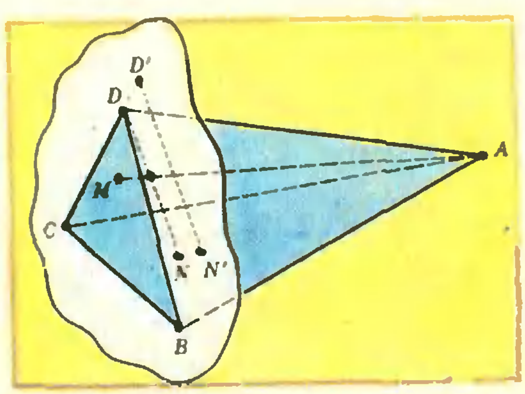


Рис. 3.

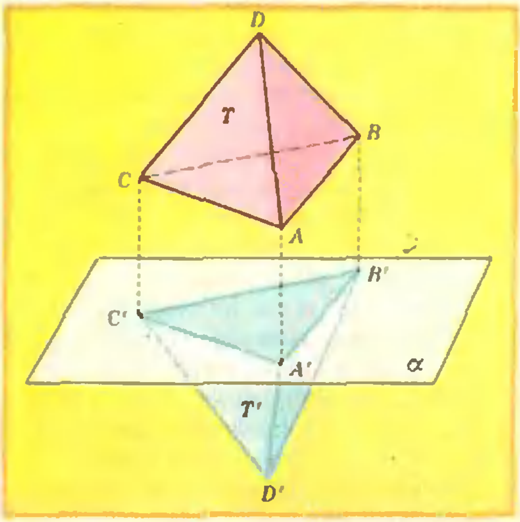


Рис. 4.

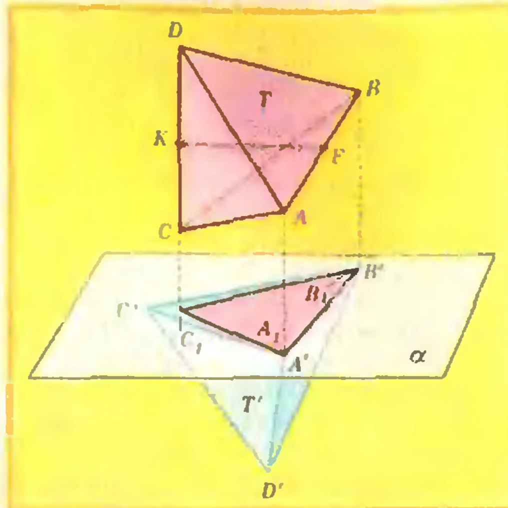


Рис. 5.

З а д а ч а 4а. *Можно ли расположить в пространстве два конгруэнтных правильных тетраэдра, так, чтобы при ортогональном проектировании их на некоторую — одну и ту же — плоскость проекция одного тетраэдра лежала целиком (включая и ее границу) внутри проекции другого тетраэдра?*

Р е ш е н и е. Расположим тетраэдр T' так, чтобы его грань $A'B'C'$ лежала в плоскости проекции α (рис. 4). Второй тетраэдр T расположим сначала так, чтобы проекция его грани ABC на плоскость α совпала с треугольником $A'B'C'$. Теперь, шевеля тетраэдр T, попытаемся достичь того, чтобы его проекция на плоскость α оказалась целиком в н у т р и треугольника $A'B'C'$. Прежде всего повернем тетраэдр T так, чтобы внутри треугольника $A'B'C'$ оказалась проекция вершины C. Это можно сделать, например, так: повернем тетраэдр T вокруг ребра AB до положения, в котором ребро CD станет перпендикулярным плоскости α. При этом проекцией тетраэдра T окажется равнобедренный треугольник $A_1B_1C_1$, причем $|A_1B_1|=|A'B'|$ (рис. 5).

Пошевелим теперь тетраэдр T так, чтобы проекция ребра AB оказалась короче отрезка $A'B'$. Для этого отметим середины F и K ребер AB и CD и повернем тетраэдр T на малый угол вокруг прямой FK. После такого шевеления проекцией тетраэдра T на плоскость α окажется трапеция $A_2B_2C_2D_2$ (рис. 6). Если угол поворота достаточно мал, то эта трапеция будет расположена в треугольнике $A'B'C'$, причем сторона A_2B_2 будет лежать на границе этого треугольника.

Чтобы трапеция оказалась целиком в н у т р и треугольника $A'B'C'$, достаточно теперь подвергнуть тетраэдр еще одному шевелению, а именно, сдвинуть тетраэдр на малый вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{FK}$ (рис. 7).

Мы видим, что тетраэдры T и T' можно расположить в пространстве таким образом, чтобы проекция тетраэдра T на плоскость α оказалась лежащей целиком внутри проекции тетраэдра T' на ту же плоскость. Задача 4а решена.

Значит, возможно в тетраэдре T' просверлить отверстие, через которое пройдет тетраэдр T (просверливать отверстие в T' следует перпендикулярно плоскости $A'B'C'$, причем так, чтобы проекцией отверстия на плоскость $A'B'C'$ оказалась какая-либо фигура, содержащая внутри себя трапецию $A_3B_3C_3D_3$ и лежащая внутри треугольника $A'B'C'$.

Идею малых шевелений полезно привлечь и тогда, когда в каком-то множестве фигур требуется выбрать (построить, найти) ту, которая в том или ином смысле является «наилучшей» (например, имеет наименьший периметр, наибольшую площадь и т. п.). В таких задачах основ-

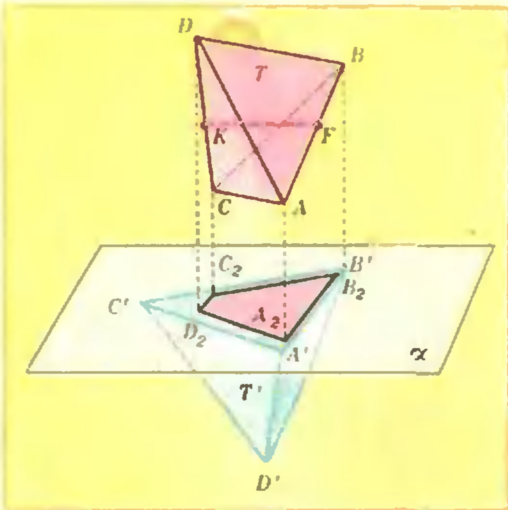


Рис. 6.

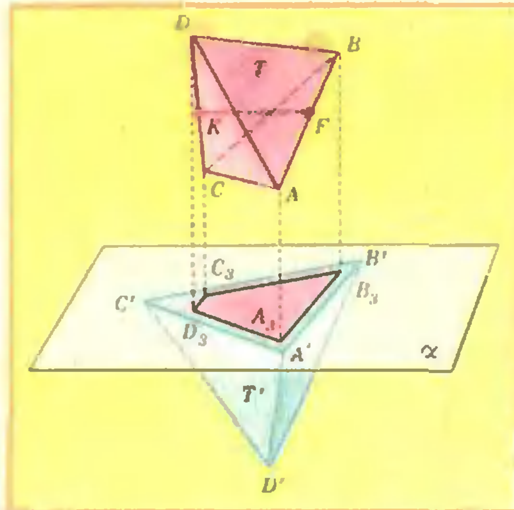


Рис. 7.

ная трудность состоит в том, чтобы сначала угадать правильный ответ; для этого и может оказаться полезным метод малых шевелений: возьмем сначала какую-то фигуру из данного множества и попробуем малым шевелением ее улучшить. Если это не удается, то правдоподобно, что взятая фигура является искомой (за этим, разумеется, должно последовать строгое доказательство).

Задача 5. *Внутри угла C, меньшего, чем развернутый, дана точка P. Укажите способ построения прямой, проходящей через точку P и отсекающей от угла C треугольник наименьшего периметра.*

Поиск решения. Проведем через точку P произвольную прямую $A'B'$ (рис. 8), и пусть Γ — «вневписанная» окружность для $\Delta A'CB'$, касающаяся стороны $A'B'$ и продолжений сторон CA' и CB'. Представим себе сначала, что окружность Γ расположена «далеко» от точки C. Периметр $2p$ треугольника $A'CB'$ равен

$$2p = |A'C| + |CB'| + |A'B'| =$$
$$= |A'C| + |CB'| + |A'T| + |B'T| =$$
$$= |A'C| + |CB'| + |A'M| +$$
$$+ |B'N| = |CM| + |CN|.$$

Будем приближать касательную окружность Γ к вершине C, уменьшая ее радиус. При этом будут уменьшаться отрезки CM, CN, а значит, и периметр $2p = |CM| + |CN|$ треугольника $A'CB'$. Если точка P расположена вне окружности Γ, то мы можем пошевелить эту окружность так, чтобы ее центр немного приблизился к вершине C, но чтобы точка P еще по-прежнему оставалась вне окружности Γ; при этом периметр треугольника $A'CB'$ уменьшится.

Такая возможность — получения наряду с данным треугольником другого треугольника с меньшим периметром — исчезнет, как только точка P окажется не вне окружности Γ, а на этой окружности. Поэтому правдоподобно, что треугольник минимального периметра получится тогда, когда прямая $A'B'$ будет касаться окружности, проходящей через точку P и касающейся сторон угла C.

Решение. Построим какую-либо окружность Γ', вписанную в угол C; пусть O' — ее центр. Далее, обозначим через P' первую (считая от C) точку пересечения луча CP с построенной окружностью. При гомотетии с центром C и коэффициентом $k = \dfrac{|CP|}{|CP'|}$ точка P' перейдет в точку P, и потому окружность Γ' перейдет в окружность γ, вписанную в угол C и проходящую через точку P. (Заметим, что окружность, обладающая этими свойствами, единственна; это также вытекает из соображений гомотетии.) Через AB обозначим касательную к окружности γ, проведенную через точку P (точки A и B лежат на сторонах угла).

Докажем, что треугольник ABC — искомый. В самом деле, если

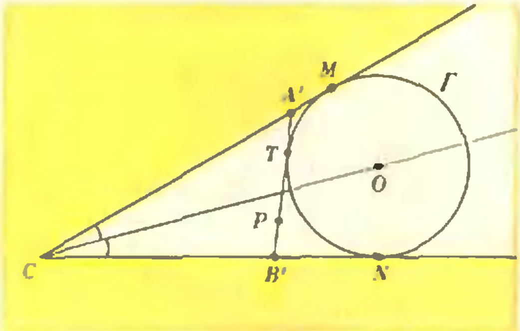


Рис. 8.

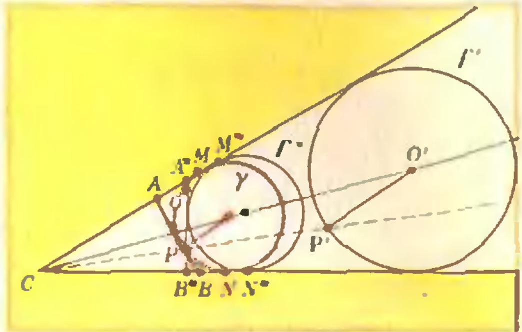


Рис. 9.

$[A^*B^*]$ — какой-либо (отличный от $[AB]$) отрезок с концами на сторонах угла, проходящий через точку P (рис. 9), то прямая A^*B^* не является касательной к окружности γ, т. е. пересекает ее в двух точках P и Q. Следовательно, вневписанная окружность Γ^* треугольника A^*B^*C получается из γ гомотетией с коэффициентом, б о л ь ш и м единицы. Но тогда ясно, что $|CM^*| + |CN^*| > |CM| + |CN|$ (рис. 9), т. е. периметр треугольника A^*B^*C б о л ь ш е периметра треугольника ABC.

Идея малых шевелений может оказаться полезной не только в геометрических задачах. Для примера рассмотрим следующую задачу («Квант», 1974, № 1, стр. 73):

З а д а ч а 6. *Три друга — Алик, Боря и Вася — рассказали, что они будто бы однажды сыграли некоторое число партий в шахматы, причем каждый с каждым сыграл одинаковое число партий. Потом, когда стали решать, кто лучше сыграл и должен считаться победителем, Алик сказал своим товарищам: «У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей». Боря сообщил: «А у меня больше, чем у каждого из вас, выигрышей», а Вася заметил: «Я набрал больше всего очков» (выигрыш — 1 очко, ничья — $^1/_2$ очка, проигрыш — 0). Мог ли в действительности быть турнир с такими результатами? Если нет, то докажите; если да, то приведите пример.*

Р е ш е н и е. Попытаемся сконструировать турнир, который удовлетворял бы поставленным трем условиям:

I. Алик должен иметь меньше всего проигрышей.

II. Боря должен иметь больше всего выигрышей.

III. Вася должен набрать больше всего очков.

Будем его составлять из отдельных туров (в туре три партии — каждый игрок играет с каждым другим одну партию). Например, может быть такой тур: Алик сыграл с двумя другими игроками вничью, а Боря выиграл у Васи. Или такой тур: Алик сыграл с двумя другими игроками вничью, а Вася выиграл у Бори. Пару таких туров назовем *двойным туром типа* А («типа Алика»). В турнире, который состоит только из одного такого двойного тура, выполняется, очевидно, условие I: у Алика меньше, чем у остальных, проигрышей (нуль проигрышей); при этом каждый игрок набрал по 2 очка. Турнир, составленный из л ю б о г о ч и с л а таких двойных туров типа А, будет обладать свойством I.

Пусть турнир составлен из большого числа двойных туров типа А — скажем, из 100 таких туров. В нем каждый набрал по 200 очков, причем у Алика меньше всего проигрышей — нуль проигрышей (но и нуль выигрышей), а Боря и Вася имеют по 100 выигрышей и по 100 проигрышей.

Теперь немного пошевелим турнир. А именно, пусть сыграно еще небольшое число туров (не обязательно «типа А»); тогда Алик будет иметь по-прежнему меньше проигрышей, чем Боря и чем Вася (иначе говоря, при малых шевелениях турнира свойство I «устойчиво»). Подберем это шевеление так, чтобы выполнялось еще условие II. Для этой цели сначала вообразим себе *двойной тур типа* В («типа Васи»): в нем каждый игрок с каждым из остальных сыграл по две партии, причем Вася сделал 4 ничьих, а Алик и Боря имеют по одному выигрышу и по одному проигрышу; каждый из трех игроков набрал по 2 очка. Если (после указанных 100 двойных туров типа А) были сыграны, скажем, 10 двойных туров типа В, то в результате такого небольшого «шевеления турнира» Алик будет иметь 10 проигрышей, Боря — 110 проигрышей, а Вася — 100 проигрышей, т. е. свойство I сохраняется. В то же время Боря будет иметь 110 выигрышей — больше, чем Алик (10 выигрышей) и чем Вася (100 выигрышей). Значит, условие II тоже выполняется. Кроме того, в итоге каждый набрал по 220 очков (так что условие III пока не выполнено).

К вновь полученному турниру применим еще одно малое шевеление в виде какого-либо одного дополнительного тура; независимо от его исхода условия I и II останутся выполненными (эти условия устойчивые). Подберем этот дополнительный тур так, чтобы Вася набрал в нем больше очков, чем каждый из остальных игроков (например, Вася набирает в нем 2 очка, выигрывая у Алика и Бори, а Алик и Боря делают между собой ничью). Таким образом, мы сконструировали турнир, в котором все три условия I, II, III выполнены, т. е. турнир, о котором говорится в условии задачи, возможен.

Упражнения

1 В четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны и конгруэнтны и, кроме того, $|AB|=|CD|$ Обязательно ли этот четырехугольник — квадрат?

2. В выпуклом пятиугольнике все стороны конгруэнтны. Обязательно ли этот пятиугольник правильный?

3 В выпуклом пятиугольнике все диагонали конгруэнтны Обязательно ли этот пятиугольник правильный?

4 В выпуклом шестиугольнике противоположные стороны попарно параллельны, а диагонали, соединяющие противоположные вершины, конгруэнтны Обязательно ли этот шестиугольник правильный?

5 Около окружности описан четырехугольник, диагонали которого конгруэнтны Обязательно ли этот четырехугольник — трапеция? (Указание. Начните с квадрата!)

6 На плоскости даны $2n$ точек $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ Докажите, что малым шевелением этих точек можно добиться того, чтобы никакие два из отрезков $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ не были параллельны и никакие три не пересекались в одной точке

7. В пространстве даны n точек $A_1, \ldots, A_n$ Докажите, что малым шевелением этих точек можно добиться того, чтобы для каждых четырех различных индексов i, j, k, l точки A_i, A_j, A_k, A_l не лежали в одной плоскости.

8 *) Дан выпуклый n-угольник M Докажите, что шевелением $n-5$ вершин этого многоугольника можно добиться того, чтобы никакие три диагонали не пересекались в одной точке

9. Дан многочлен

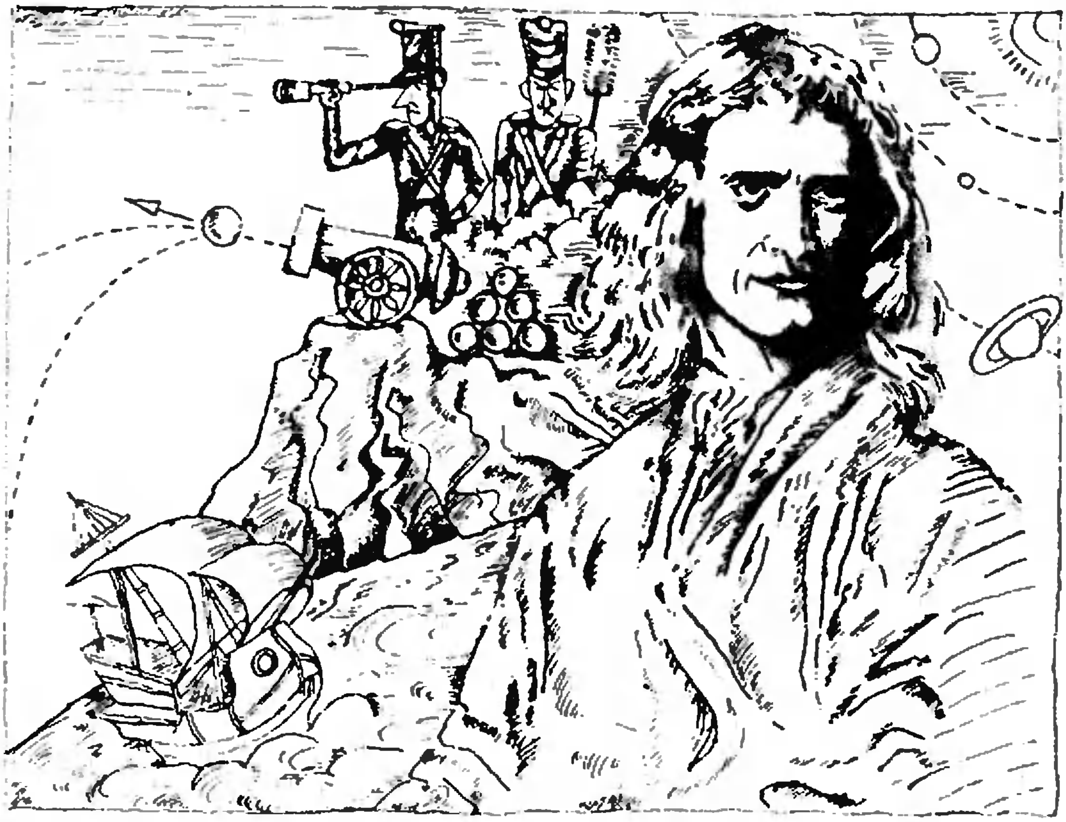
$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Докажите, что малым «шевелением» свободного члена a_n можно добиться того, чтобы многочлен не имел кратных корней (Указание Число x_0 тогда и только тогда является кратным корнем многочлена, когда оно одновременно является корнем этого многочлена и его производной)

10. Внутри угла C, меньшего, чем развернутый, дана точка P Постройте прямую, проходящую через точку P и отсекающую от угла C треугольник наименьшей площади

11 Если четырехугольник выпуклый, то сумма длин диагоналей больше его полупериметра Приведите контрпример, показывающий, что обратная теорема неверна.

*) См. также задачу М533 («Квант», 1978, № 11).



И. Белкин

О Ньютоновских законах движения. Сила

Слово «сила» в обычной речи имеет много значений и допускает множество толкований. Говорят о покупательной силе денег и о силе привычки, о силе воли и о силе общественного мнения, о моральной силе и даже... о нечистой силе. В этих примерах и во множестве других слово «сила» не имеет вполне ясного и однозначного объяснения. Во всяком случае, это слово имеет в них совершенно различный смысл.

Но в механике сила определяется совершенно строго и однозначно. Как говорил Ф. Энгельс, в механике «...действительно знают, что означает слово сила». В этой статье и пойдет речь о силе как механическом понятии и механической величине.

Взаимодействия и силы

В первой нашей статье о законах движения («Квант», 1979, № 2) уже упоминалось, что сила — это влияние одного тела на другое. Но мы видели, что влияние тел всегда взаимное — тела всегда взаимодействуют, то есть влияют друг на друга, и сообщают друг другу ускорения. Значит, при взаимодействии двух тел к каждому из них приложена сила. Сила, приложенная к телу,— причина его ускорения. Ньютон так и определяет силу: «Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения». В этом и состоит смысл понятия силы в механике. Но пока это только понятие. Нас же интересует сила как физическая величина, которую можно измерить, выразить числом.

Слова «влияние одного тела на другое» содержат нечто неясное, неопределенное. Что значит влияние? Как оно происходит? Тело падает вниз с ускорением, потому что на него влияет Земля. Дверь, снабженная пружиной, движется с ускорением, потому что на нее влияет пружина. Кусок железа движется с ускорением под влиянием магнита. Но разве похожи одно на другое эти влияния? Ясно, что они совершенно различны по своей природе. Во времена Ньютона о природе всех этих влияний ничего не было известно. Но в механике этого, оказывается, можно и не знать. Важно только, что влияние на тело состоит в том, что телу сообщается ускорение. А это значит, что совершенно различные по своей природе влияния (силы) можно сравнивать между собой, если мы сумеем их выразить числами. А для этого необходимо установить, как связаны силы с сообщаемыми ими ускорениями.

Второй закон Ньютона

Эту связь и установил Ньютон из анализа опытных данных. Он сформулировал ее в виде второго закона движения (второй закон Ньютона).

В изложении самого Ньютона этот закон гласит: «Изменение движения пропорционально приложенной движущей силе и имеет то направление, в котором эта сила действует».

В этой формулировке заключена основная идея механики: сила вызывает *изменение* движения, а не само движение, как думали до Ньютона (и как думают и теперь люди, не изучавшие механику). Однако слова «изменение движения» несколько загадочны: ведь движение — это процесс, а не величина; пропорциональными же друг другу могут быть только величины. Неясно также, откуда Ньютон узнал, что существует именно такой закон — закон пропорциональности между силой и изменением движения. Разумеется, закон этот установлен на основании опыта или опытов. Но каких? Ньютон об этом не сообщает. Он просто «велит» телам вести себя так, а не иначе.

Мы можем теперь считать, что слова «изменение движения» означают ускорение, поскольку ускорение представляет собой быстроту изменения скорости движения тела, если масса его постоянна *). Что касается опыта, из которого может быть установлена связь между ускорением и силой, то он должен состоять в том, чтобы различные тела (различные по массе) подвергались действию одной и той же силы; при этом надо измерять ускорения, которые получают эти тела. Та величина, которая в этих измерениях окажется одной и той же для всех тел, и будет служить мерой силы, приложенной к этим телам.

В природе существует одна-единственная сила, которая не зависит от того, к какому телу она приложена. Это — упругая сила деформированного тела, например пружины. Эта сила называется силой упругости. Особенность силы упругости состоит в том, что она зависит только от того, насколько деформировано тело. Так, сила упругости пружины зависит только от ее растяжения (или сжатия) по сравнению с исходной длиной (во времена Ньютона этот факт был уже известен). Поэтому, если поддерживать растяжение пружины постоянным (фиксированным), то она действует на любое прикрепленное к ней тело с одной и той же силой независимо от того, какова масса этого тела (конечно, необходимо, чтобы масса самой пружины была пренебрежимо мала по сравнению с массой прикрепленного к ней тела).

Итак, опыт, который позволил бы установить связь между ускорением и силой, может быть проведен только с использованием пружины. Такой опыт описан в учебнике «Физика 8» (с. 85). Оказывается, пружина, сжатая (или растянутая) на фиксированную длину, сообщает прикрепленным к ней телам ускорения, направления которых всегда совпадают с направлением действующей на тела силы упругости, а абсолютные значения различны для тел с разными массами.

*) В современных книгах обычно пишут, как бы «исправляя» Ньютона, вместо «изменение движения» — «изменение количества движения». Под количеством движения при этом понимают произведение массы тела на его скорость (теперь эту величину чаще называют импульсом). Нетрудно понять, что такое толкование слов Ньютона не противоречит принятому нами.

Но для всех тел остается одной и той же величина произведения массы m тела на его ускорение $\vec{a}$, то есть величина $m\vec{a}$. Отсюда следует, что сила $\vec{F}$ определяется уравнением

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Второй закон Ньютона так теперь и формулируется: *сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение.*

Ясно, что эта формулировка вполне соответствует ньютоновской, поскольку из нее следует, что ускорение («изменение движения» по Ньютону) пропорционально силе:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Итак, сила, о которой говорилось только, что она представляет собой меру влияния одного тела на другое, стала теперь физической величиной, которая может быть выражена числом. Для нее можно установить единицу измерения. За единицу силы естественно принять силу, которая сообщает телу с массой, равной единице (1 кг), ускорение, равное единице (1 м/с^2). Справедливо, что этой единице присвоено название «ньютон» (Н) в честь творца классической механики.

$\vec{F} = m\vec{a}$ — универсальный закон

Мы уже упоминали, что влияния одних тел на другие могут быть различной природы. Иными словами, различна природа сил взаимодействия. Между тем ко второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ нас привели опыты с силами упругости. Быть может, только для этих сил и справедлив закон Ньютона?

Оказывается, нет. Второй закон Ньютона — фундаментальный закон, он справедлив для любых сил и для всех тел. Им пользуются при изучении движения снарядов и молекул, ветра и звезд, морских волн и деталей механизмов.

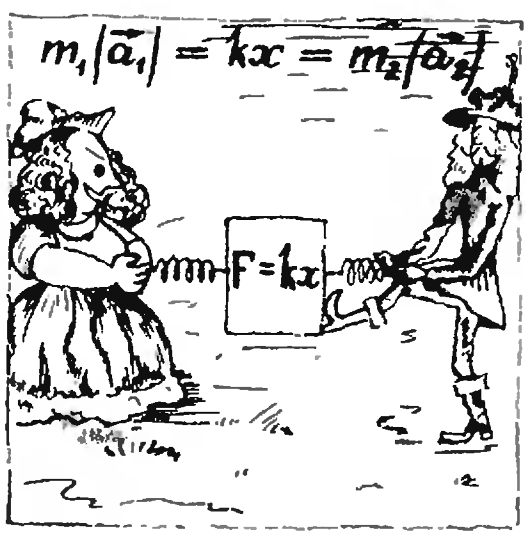
Когда к закрепленной одним концом вертикально расположенной пружине прикреплен груз и груз этот находится в покое, это значит, что ускорения, сообщаемые грузу пружиной и Землей, равны по величине и противоположны по направлению. Сколь ни различны два тела — Земля и растянутая пружина, действующие на покоящийся груз, сколь ни различна природа этих действий, в одном они похожи — они, действуя по отдельности, сообщили бы этому грузу одинаковые по численному значению ускорения (равные $|\vec{g}|$). Они, так сказать, взаимозаменяемы.

Конечно, для физики вопрос о природе различных взаимодействий и сил — очень важный вопрос. Но им занимается не механика, а другие разделы физики. Для механики важно, что всякая сила, приложенная к телу, равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение.

$\vec{F} = m\vec{a}$ — уравнение движения

Второй закон Ньютона — самый важный закон механики, потому что именно он позволяет решить любую задачу о движении тел. Дело в том, что ускорение $\vec{a}$, входящее в уравнение второго закона, представляет собой быстроту изменения (по модулю и по направлению) скорости тела со временем:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$



Нужно помнить, что за этим векторным уравнением стоят три уравнения для проекций ускорения на оси координат:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \quad a_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t},$$

где Δv_x, Δv_y, Δv_z — изменения проекций скорости, Δt — промежуток времени, за который произошли изменения.

В свою очередь проекция скорости — это быстрота изменения координат тела со временем:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Значит, за величиной ускорения во втором законе Ньютона в действительности в сложном виде «скрывается» изменение координат со временем: быстрота изменения быстроты изменения координат (на языке высшей математики это причудливое словосочетание выражается проще: вторая производная координат по времени).

Решив уравнение $\vec{F} = m\vec{a}$, мы получим выражение, показывающее, как координаты движущегося тела изменяются с течением времени. Следовательно, можем узнать положение движущегося тела в любой момент времени. А это и есть главная задача механики. Для этого и существует эта наука. Вот почему уравнение, выражающее второй закон Ньютона, называется уравнением движения.

Чтобы составить это уравнение и решить его, нужно знать силу, действующую на тело. Кроме того, нужно еще знать так называемые начальные условия — координаты тела и его скорость в некоторый начальный момент времени. Наоборот, если закон движения тела известен из опыта, уравнение движения (второй закон Ньютона) позволяет найти силу, приложенную к телу. Если, например, координата x тела изменяется со временем по закону $x = x_0 + v_x t$, то есть тело движется вдоль оси x с постоянной скоростью v_x, то, согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на тело (вдоль оси x), равна нулю. Если координата x изменяется со временем по формуле

$$x = x_0 + v_x t + \frac{a_x t^2}{2},$$

тело движется по оси x с постоянным ускорением a_x. По второму закону это означает, что к телу приложена постоянная сила $\vec{F}_x$, направленная вдоль оси x и равная по модулю ma_x.

Что значит «знать силу»?

Знать движение — это значит знать, как координаты тела зависят от времени. Это ясно из только что приведенных примеров. Но что значит «знать силу»?

Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, что сила — всегда результат взаимодействия. Если на тело действует сила, то существует какое-то другое тело, от которого она «исходит». И сила зависит от взаимного расположения взаимодействующих тел, от расстояния между ними. Это следует уже из того, что тела, бесконечно удаленные друг от друга, вовсе не взаимодействуют. Но при движении расстояние между взаимодействующими телами может изменяться. Поэтому могут изменяться и силы взаимодействия между этими телами. Значит, сила, приложенная к данному телу, зависит от положения движущегося тела относительно того тела, которое на него действует. Может она зависеть и от скорости движения тела относительно того тела, которое эту силу «создает».

Знать силу — это значит знать, как сила зависит от координат и скоростей движущихся тел. И если вид этой зависимости известен, то соответствующее выражение и нужно подставить вместо $\vec{F}$ в формулу $\vec{F} = m\vec{a}$.

А как узнать эту зависимость? Здесь, как всегда, нужно обратиться к опыту.

Для сил, изучаемых в механике, зависимости от координат и скоростей известны давно.

В 1678 году Роберт Гук (1635—1703) опытным путем установил, что сила упругости пружины пропорциональна ее удлинению. «Каково растяжение, такова сила» — такой короткой фразой объявил Гук об открытом им законе. Теперь этот закон носит его имя. Выражают его формулой

$$F = -kx.$$

Здесь k — коэффициент пропорциональности, характерный для каждой пружины; x — удлинение пружины, то есть разность длин деформированной и недеформированной пружины. Если вести отсчет координаты свободного конца пружины от положения этого конца при недеформированной пружине, то x — это координата конца пружины. Следовательно, формула $F = -kx$ как раз и показывает, как сила упругости зависит от координаты.

Для другой важной механической силы — силы всемирного тяготения — вид зависимости от координат был установлен самим Ньютоном. Сила эта определяется формулой

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

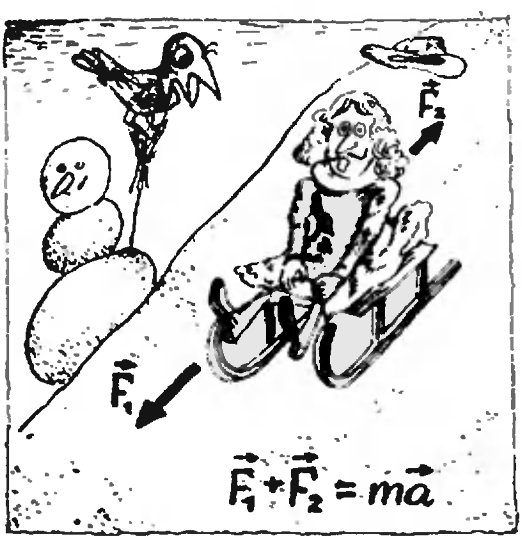
Здесь r — расстояние между взаимодействующими телами, m_1 и m_2 — массы этих тел, γ — коэффициент пропорциональности. Расстояние r и определяет координаты одного тела относительно другого. В земных условиях проявлением силы всемирного тяготения является сила тяжести, равная по модулю $m|\vec{g}|$, где m — масса тела, $\vec{g}$ — ускорение свободного падения. В это выражение координаты тела как будто не входят. Однако нужно иметь в виду, что значение $|\vec{g}|$ зависит от расстояния до тела от центра Земли, то есть от его координат относительно этого центра. Так что и сила тяжести зависит от координат. (Только вблизи поверхности Земли ускорение $|\vec{g}|$ можно приближенно, хотя и с большой точностью, считать постоянным.)

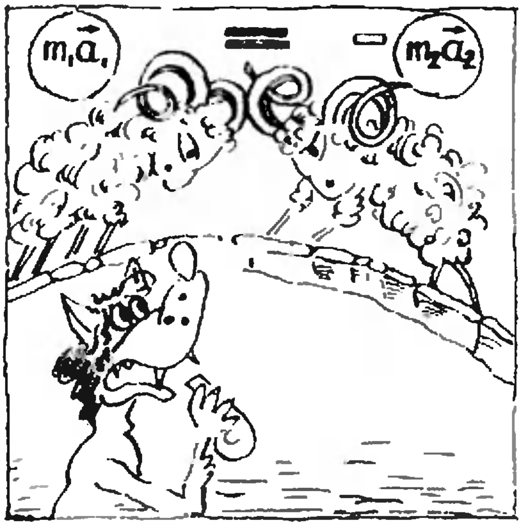
Несколько позже, уже в XVIII веке, была изучена и третья механическая сила — сила трения. Это единственная из механических сил, которая зависит не от координат тела, к которому она приложена, а от относительной скорости тела и направлена против скорости.

Две из трех механических сил — сила упругости и сила трения — имеют, как выяснилось, электромагнитную природу. Природа электромагнитных сил, законы, которым они подчиняются, стали известны около ста лет назад. Природа третьей механической силы — силы всемирного тяготения — была объяснена всего шестьдесят лет назад. А законами механики пользуются уже триста лет. Это связано с тем, что для механики природа сил несущественна. Важно лишь знать, как зависят силы от координат и от скоростей.

Силы складываются

Итак, опыт показывает, что механические силы зависят от координат и скоростей движущихся тел. И опыт же показывает, что ни от чего другого они не зависят. В частности, сила, приложенная к телу, не зависит от того, действует ли она на тело «в одиночестве» или вместе с другими силами. Силы, приложенные к телу, не «мешают» друг другу сообщать ему ускорение. Конечно, о теле, к которому приложено несколько сил, нельзя сказать, что у него и ускорений несколько. У него одно ускорение, равное векторной сумме тех ускорений, которые сообщила бы ему каждая из сил, будь она единственной. Можно поэтому сказать, что и сила на тело действует одна, но она равна векторной сумме всех приложенных к телу





сил. И когда к телу приложено сразу несколько сил, в уравнении $\vec{F} = m\vec{A}$ под $\vec{F}$ нужно понимать векторную сумму всех приложенных сил. Ее называют равнодействующей силой.

Третий закон Ньютона

О третьем законе Ньютона нам остается сказать очень мало. Не потому, что закон маловажный, не заслуживающий серьезных пояснений. Наоборот, в нем содержится самая главная идея механики. А потому, что об этом законе у нас уже была речь и мы им уже пользовались.

В том законе движения, который в книге Ньютона значится под третьим номером и который сохраняет этот традиционный номер во всех книгах по механике от Ньютона до наших дней, говорится о том, что силы возникают при взаимодействии тел, что силы, действующие на каждого из участников взаимодействия, одинаковы по модулю и противоположны по направлению. Об этом мы уже говорили в предыдущей нашей статье. Там указывалось, что при взаимодействии двух тел каждое из них получает ускорение: эти ускорения направлены в противоположные стороны и отношение модулей ускорений равно обратному соотношению масс взаимодействующих тел. Все это может быть выражено формулой

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2.$$

Теперь мы знаем, что произведение массы тела на его ускорение равно силе, приложенной к телу. Так что $m_1\vec{a}_1$ и $m_2\vec{a}_2$ — это силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующие на первое и второе тела, и мы можем написать

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

В этом и состоит третий закон Ньютона: *два тела взаимодействуют друг с другом силами, равными по величине и противоположно направленными.*

Сам Ньютон выразил третий закон движения такими словами: «Действие всегда равно противодействию, или действия тел друг на друга всегда равны и противоположны по направлению». Ньютон пользуется здесь словами «действие» и «противодействие», но второй фразой своей формулировки он поясняет, что между действием и противодействием никакой разницы нет. И то, и другое — сила. Добавим к этому, что и по природе своей силы, с которыми тела действуют друг на друга при взаимодействии, одинаковы. На силу упругости тело «отвечает» силой упругости, на силу трения — силой трения и т. п.

Таковы законы движения, открытые триста лет назад Исааком Ньютоном. Именно открытые, открытые в природе, а не придуманные. Истекшие столетия показали, что для тех движений, которые имел в виду Ньютон, эти законы справедливы, они неизменно подтверждаются опытом.

Имел же в виду Ньютон те движения, которые он, его современники и предшественники могли наблюдать и изучать. Это — обычные в окружающем нас мире движения тел — полет брошеного камня и течение рек, движения маятников и кораблей, планет и ветров.

Одно из «правил рассуждения», которые Ньютон приводит в своей книге, гласит: «Такие свойства тел, которые... оказываются присущими всем телам, над которыми можно производить опыты, должны рассматриваться как свойства всех тел вообще». На этом основании считалось, что законы движения Ньютона справедливы для всех движений всех без исключения тел. Для движений быстрых и медленных, для тел больших и малых.

И только в начале XX века выяснилось, что это не так. Механика Ньютона оказывается неверной, во-первых, тогда, когда тела движутся со скоростями, близкими к скорости света. Это было установлено теорией относительности А. Эйнштейна в 1905 году. Связано это с тем, что взаимодействие между телами передается не мгновенно, как считалось раньше, а с определенной конечной скоростью. Эта скорость как раз и равна скорости света. Неудивительно, что когда скорость движения тела близка к скорости передачи взаимодействия, законы механики становятся иными. Но и в механике теории относительности (в релятивистской механике) мы имеем дело со знакомыми понятиями и величинами — расстояниями и временем, скоростями и ускорениями, массами и силами. Но соотношения между ними совсем другие. В эти новые формулы всегда входит отношение $\frac{v}{c}$ скорости тела v к скорости света c. Когда это отношение мало́ и его можно считать равным нулю, формулы сразу превращаются в формулы механики Ньютона. Поэтому появление теории относительности не привело ни к отказу от этой механики, ни к ее пересмотру.

Во-вторых, механика Ньютона совершенно неприменима к движениям очень малых частиц, из которых образованы атомы и молекулы. Здесь явления описываются новой теорией, появившейся в физике пятьдесят лет назад. В этой теории даже привычные механические понятия, такие, как траектория, скорость, ускорение, сила, теряют свой обычный «механический» смысл. Самое понятие движения здесь отличается от привычного. Но и появление этой новой теории (ее называют квантовой механикой) нисколько не повлияло на механику Ньютона, которая остается незыблемой для тех движений, для которых она была создана.

В «Кванте» № 9 за 1975 год под заглавием «Когда катет длиннее гипотенузы» была опубликована беседа с экс-чемпионом мира Михаилом Талем. Мы тогда не подозревали, что в редакцию придет следующее письмо...

Докажем, что в любом прямоугольном треугольнике гипотенуза конгруэнтна катету.

Пусть $[BB_1]$ — биссектриса угла B прямоугольного треугольника ABC (см. рисунок), D — середина катета AC, O — точка пересечения перпендикуляра к $[AC]$ в точке D с (BB_1), $[OE]$ и $[OF]$ — перпендикуляры, опущенные из точки O на прямые AB и BC соответственно. Легко показать, что $\triangle BOE \cong \triangle BOF$, откуда

$$|BE| = |BF|. \qquad (1)$$

Далее, из равенства

$$|OA| = |OC|$$

следует, что

$$\triangle OEA \cong \triangle OCF,$$

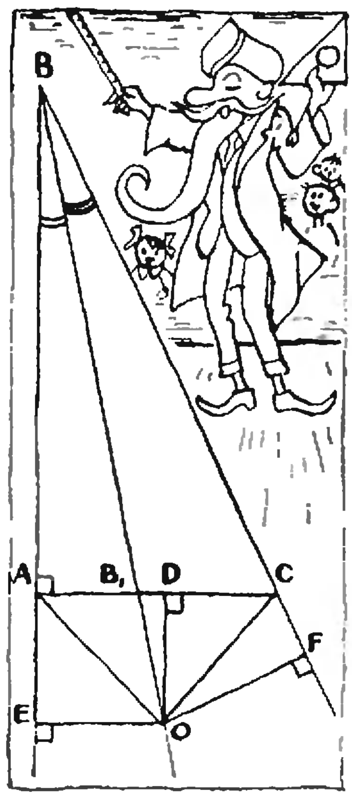
откуда

$$|AE| = |FC|. \qquad (2)$$

Из равенства (1) и (2) получаем, что $|AB| = |BC|$.

Где здесь ошибка?

С. Сефибеков



О. Кабардин, Н. Шефер

Самодельные дифракционные решетки

Впервые дифракционные решетки для изучения спектров использовал в 1821 году немецкий физик Фраунгофер. Его решетки, изготовленные путем наматывания тончайшей проволоки на два параллельных винта, содержали всего лишь несколько десятков проволочек на одном миллиметре длины решетки. (Заметим, что хорошие современные решетки, представляющие собой прозрачные пластинки с нанесенными на них непрозрачными штрихами, имеют до нескольких тысяч штрихов на 1 мм.)

Попробуйте и вы изготовить простую дифракционную решетку. В домашних условиях это можно сделать, например, фотографическим способом.

Для этого нужно на листе ватмана плакатным пером начертить тушью систему параллельных полос одинаковой ширины. Расстояние между полосами можно выбрать равным их ширине. После фотографирования и проявления на негативе получится система светлых и темных полос, то есть чередование прозрачных и непрозрачных для света промежутков. Укрепив полученый негатив в рамке для диапозитивов, работу по изготовлению дифракционной решетки можно считать законченной.

Фотографирование лучше проводить при хорошем солнечном освещении или с подсветкой лампой дневного света.

С одного шаблона можно получить дифракционные решетки с различными периодами, если фотографировать его с различных расстояний. Пусть, например, ширина A светлых полос и ширина B темных полос на шаблоне одна и та же и равна 3 мм; мы хотим получить решетку с постоянной $d = a + b = 0{,}05$ мм ($a = b = 0{,}025$ мм), фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F = 50$ мм. Тогда расстояние s до шаблона можно найти из выражения

$$\frac{s}{F} = \frac{A}{a},$$

откуда

$$s = F\frac{A}{a} = 6 \text{ м}.$$

Полученная после проявления решетка будет содержать на одном миллиметре

$$n = \frac{1}{d} = \frac{1}{0{,}05} = 20 \text{ штрихов},$$

то есть примерно столько же, сколько в первых решетках Фраунгофера.

Основное назначение дифракционной решетки как спектрального прибора — определение длины световой волны. Из условия

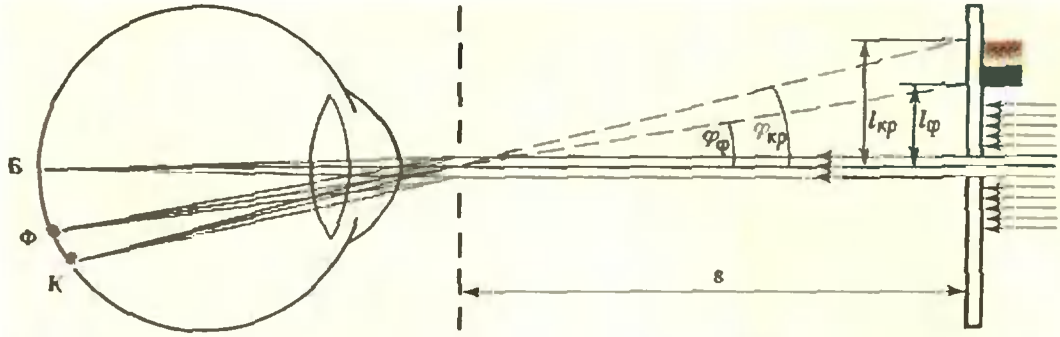
$$d \sin \varphi = k\lambda$$

главных максимумов дифракционной картины, полученной с помощью решетки, следует, что чем меньше постоянная решетки d, тем под большим углом будет наблюдаться максимум, соответствующий длине волны λ, в спектре k-го порядка.

Это означает, что с уменьшением постоянной решетки (с увеличением числа штрихов на единицу длины) увеличивается возможность разделять близко расположенные спектральные линии (как говорят, увеличивается *дисперсия* решетки)*). Кроме того, по мере увеличения общего числа штрихов все больше света попадает в главные максимумы, и они становятся все более яркими.

В связи с этим желательно изготовить решетку с возможно бо́льшим

*) Подробнее см., например, книгу: Кабардин О. Ф., Орлов В. А., Шефер Н. И. Факультативный курс физики. 10 класс. (М., «Просвещение», 1979.)



общим числом штрихов N и возможно меньшей постоянной решетки d.

Выполнение первого требования определяется в основном терпением и аккуратностью. Нужно вычертить шаблоны на двух-трех листах ватмана и затем склеить их в один большой шаблон для фотографирования (или взять один лист ватмана и уменьшить ширину светлых и темных полос до одного миллиметра).

На второе требование накладывает ограничение разрешающая способность фотоэмульсии, обусловленная ее зернистым строением. Фотопленки с чувствительностью 130—250 единиц ГОСТа обладают разрешающей способностью не более 75—70 штрихов на миллиметр, с понижением чувствительности до 32 единиц ГОСТа разрешающая способность возрастает до 115 штрихов на миллиметр.

Период d полученной дифракционной решетки можно определить, измерив размер C изображения листа ватмана на негативе и разделив его на число N черных линий, нанесенных на чертеж до фотографирования:

$$d = \frac{C}{N}.$$

После изготовления решетки можно приступить к экспериментам. На одном конце деревянной линейки длиной 40—50 см укрепите дифракционную решетку, а на другом — самодельную шкалу из миллиметровой бумаги, наклеенной на полоску картона со щелью. Расположите решетку так, чтобы штрихи были параллельны щели, и направьте на щель свет от лампы накаливания. Поместив глаз вблизи решетки, изменением взаимного расположения экрана и лампы добейтесь наилучших условий видимости спектра.

Ход световых лучей при наблюдении спектра с помощью дифракционной решетки представлен на рисунке.

Используя самодельную дифракционную решетку, можно оценить границы спектральной чувствительности глаза. Для этого нужно определить длину волны красного света на одном краю наблюдаемого спектра и длину волны фиолетового света на другом краю спектра. Если известны период решетки d и порядок спектра k, определение длины волны λ сводится к измерению угла φ между нормалью к плоскости решетки и направлением на положение максимума, соответствующего избранной длине волны:

$$d \sin \varphi = k\lambda,$$

и

$$\lambda = \frac{d}{k} \sin \varphi.$$

Рассматривая щель в экране через дифракционную решетку, найдите положения красного и фиолетового краев спектра 1-го порядка. По обе стороны от щели отсчитайте расстояния $l_{кр}$ и $l_ф$ (см. рисунок) и найдите их средние значения. Измерив расстояние s от щели до решетки, найдите тангенсы углов $\varphi_{кр}$ и $\varphi_ф$ ($\operatorname{tg} \varphi = l/s$), а по ним — синусы соответствующих углов. Зная период решетки, определите длины волн для красных и фиолетовых лучей в спектре 1-го порядка.

Такие же измерения и вычисления проделайте для спектра 2-го порядка.

И. Янтаров

Коммутирующие многочлены

От редакции

Обычно математические задачи, предлагающиеся школьникам, либо весьма косвенно связаны с новыми результатами, либо касаются их отдельных деталей и не дают возможности увидеть картину в целом. Наверное, это происходит потому, что в математике все взаимосвязано и, как правило, для того, чтобы полностью разобраться даже во вполне элементарном вопросе, приходится привлекать соображения из неэлементарных областей математики.

Задача о коммутирующих многочленах, которой посвящена эта статья,— счастливое исключение: здесь удается достаточно близко подойти к проблематике, имеющей общематематический интерес, пользуясь лишь элементарными средствами.

Нам эта задача стала известна из письма, присланного два года назад в «Квант» Э. Туркевичем, которому принадлежат здесь первые результаты. Задача эта, дополненная некоторыми пунктами, предлагалась на исследовательском туре XI Всесоюзной олимпиады и была помещена в Задачнике «Кванта» (М455).

Формулировка задачи

Многочлены P и Q от одной переменной называются коммутирующими *), если $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Выписанное равенство означает, что если в обеих частях равенства раскрыть все скобки и привести подобные члены, то получатся одинаковые многочлены. Это эквивалентно тому, что для любого действительного числа d выполняется численное равенство $P(Q(d)) = Q(P(d))$.

В задаче М455 рассматриваются только многочлены со старшим коэффициентом 1; такие многочлены мы будем называть *унитарными*. (Как мы увидим ниже, вопрос о произвольных коммутирующих многочленах можно свести к вопросу о многочленах со старшим коэффициентом, равным ± 1.)

а) *Для любого числа α найдите все многочлены степени не выше трех, коммутирующие с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$.*

б) *Докажите, что существует не более одного многочлена заданной степени, коммутирующего с данным многочленом P степени два.*

в) *Найдите все многочлены степеней 4 и 8, коммутирующие с данным многочленом P степени два.*

г) *Докажите, что если два многочлена Q и R коммутируют с некоторым многочленом P степени два, то они коммутируют между собой.*

д) *Докажите, что существует такая последовательность многочленов $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$, коммутирующих между собой, что степень многочлена P_k равна k и $P_2(x) = x^2 - 2$.*

Решение задач а)—г)

а) Пусть $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Распишем равенство $P(Q(x)) = Q(P(x))$:

$$(x^3 + ax^2 + bx + c)^2 - \alpha = (x^2 - \alpha)^3 + a(x^2 - \alpha)^2 + b(x^2 - \alpha) + c.$$

Прежде чем раскрывать скобки, заметим, что справа стоят только четные степени x, а слева коэффициент при x^5 равен $2a$. Значит, $a = 0$. Но тогда слева коэффициент при x^3 равен $2c$, так что и $c = 0$. Поэтому $Q(x) = x^3 + bx$. Раскрыв скобки и приравняв коэффициенты, получаем систему

$$\begin{cases} 2b = -3\alpha, \\ b^2 = 3\alpha^2 + b, \\ \alpha = \alpha^3 + b\alpha. \end{cases}$$

Пусть $\alpha = 2\gamma$; тогда $b = -3\gamma$. Из 2-го уравнения $9\gamma^2 = 12\gamma^2 - 3\gamma$, то есть $\gamma^2 - \gamma = 0$. Значит, $\gamma = 0$ или $\gamma = 1$. Легко проверить, что оба эти решения подходят.

*) От латинского *commutativus* — меняющийся.

Таким образом, многочлен 3-й степени Q, коммутирующий с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$, существует только при $\alpha = 0$ ($P(x) = x^2$, $Q(x) = x^3$) и при $\alpha = 2$ ($P(x) = x^2 - 2$, $Q(x) = x^3 - 3x$).

Аналогично доказывается, что если степень Q равна 2, то $Q = P$, а если она равна 1, то $Q(x) = x$.

Этот пункт очень простой. Он давался школьникам на олимпиаде, чтобы они лучше разобрались в условии задачи и немножко привыкли к ней. Кроме того, если внимательно разобраться в уравнениях, которые были выписаны, то возникает идея, как решать пункт б) — один из ключевых пунктов задачи.

б) Пусть $Q(x) = x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \dots + a_{k-1}x + a_k$, $P(x) = x^2 + px + q$. Распишем равенство

$$(x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k)^2 + p(x^k + \dots + a_k) + q - (x^2 + px + q)^k - a_1(x^2 + px + q)^{k-1} - \dots - a_k = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $x^{2k}, x^{2k-1}, \dots, x, x^0$, мы получаем систему уравнений для $a_1, a_2, \dots, a_k, p, q$. Решить эту систему и даже просто выписать ее довольно трудно. Однако легко заметить, что коэффициенты $b_1, b_2, \dots, b_k$ при степенях $x^{2k-1}, x^{2k-2}, \dots, x^k$ имеют следующую форму:

$b_1 = 2a_1 + R_1(p, q) = 0,$

$b_2 = 2a_2 + R_2(p, q, a_1) = 0,$

. . . .

$b_k = 2a_k + R_k(p, q, a_1, \dots, a_{k-1}) = 0.$

Здесь R_i — некоторое алгебраическое выражение от $p, q, a_1, \dots, a_{i-1}$. Из первого уравнения вытекает, что a_1 выражается через p и q; из второго — что a_2 выражается через p, q и a_1 и, значит, выражается через p и q; из третьего — что a_3 выражается через p, q, a_1 и a_2 и, значит, выражается через p и q, ... Итак, мы видим, что все коэффициенты $a_1, \dots, a_k$ выражаются через p и q, то есть коэффициенты многочлена Q, коммутирующего с P, однозначно выражаются через p и q, что и требовалось доказать.

Легко проверить, что аналогичное рассуждение можно провести для любого многочлена P, лишь бы его степень была больше 1 (а Q был унитарным), то есть утверждение пункта б) верно для любого такого многочлена.

Пункт б) является ключевым в задаче. Из него уже легко вытекают пункты в) и г).

в) Докажем, что многочлен $Q(x) = P(P(x))$ коммутирует с P. Действительно, $Q(P(x)) = P(P(P(x))) = P(Q(x))$. Многочлен Q имеет степень четыре и в силу б) является единственным многочленом такой степени, коммутирующим с P. Аналогично доказывается, что единственным многочленом степени 8, коммутирующим с P, является многочлен $R(x) = P(P(P(x)))$.

г) Пусть $S(x) = Q(R(x))$ и $T(x) = R(Q(x))$. Поскольку P коммутирует с Q и R, то $P(S(x)) = P(Q(R(x))) = Q(P(R(x))) = Q(R(P(x))) = S(P(x))$; значит, P коммутирует с многочленом S. Аналогично проверяется, что P коммутирует с многочленом T. Кроме того, ясно, что S и T — унитарные многочлены одинаковой степени (если Q и R имеют степени k и l, то степени многочленов S и T равны kl). Из б) вытекает, что $S = T$, то есть $Q(R(x)) = R(Q(x))$, что и требовалось.

Так же, как и в пункте б), утверждение остается верным, если P — любой многочлен степени больше 1, а Q и R унитарны.

Многочлены Чебышева. Решение пункта д)

Пункт д) намного сложнее остальных пунктов. Мы приведем несколько различных подходов к его решению.

Первый способ. Пусть $x = t + t^{-1}$. Тогда легко проверить, что x^k имеет вид $x^k = (t + t^{-1})^k = (t^k + t^{-k}) + a_1(t^{k-1} + t^{-(k-1)}) + a_2(t^{k-2} + t^{-(k-2)}) + \dots + a_{k-1}(t + t^{-1}) + a_k$, где $a_1, \dots, a_k$ — некоторые фиксированные числа. Индукцией по k отсюда выводится, что $t^k + t^{-k}$ представляется в виде

$$x^k + b_1x^{k-1} + \dots + b_{k-1}x + b_k,$$

где $b_1, \dots, b_k$ — некоторые фиксированные числа. Обозначим многочлен $x^k + b_1x^{k-1} + \dots + b_k$ через

$P_k(x)$. По определению $P_k(t+t^{-1}) = t^k + t^{-k}$, так что $P_k(P_l(t+t^{-1})) = P_k(t^l+t^{-l}) = t^{kl}+t^{-kl} = P_{kl}(t+t^{-1})$. Таким образом, $P_k(P_l(x)) = P_{kl}(x) = P_l(P_k(x))$, то есть любые два из многочленов P_k коммутируют. Поскольку $P_2(x)=x^2-2$, мы построили искомую последовательность многочленов.

Второй способ. Приведем способ получения многочленов P_k при помощи *многочленов Чебышева* T_k. Мы не будем давать прямого определения этих многочленов, но приведем соотношения, которым они удовлетворяют (и которые определяют их однозначно):

$$T_k(\cos t) = \cos kt.$$

Можно доказать, что T_k — многочлен степени k. Легко проверить, что многочлены Чебышева коммутируют:

$$T_k(T_m(x)) = T_{km}(x) = T_m(T_k(x))$$

— дело сводится к тому, что $\cos k(mt) = \cos kmt = \cos m(kt)$. Но T_k — не унитарный многочлен: его старший коэффициент равен 2^{k-1}. Этот недостаток легко исправить, «растянув» с помощью замены переменной аргумент и значение многочлена в два раза, т. е. положив $P_k(x) = 2T_k(x/2)$. От такой процедуры коммутативность не нарушится (проверьте это!). Замечательная последовательность многочленов Чебышева, появляющихся в самых разных вопросах анализа (особенно в теории приближения функций многочленами), оказывается последовательностью коммутирующих многочленов. Именно таким способом построил последовательность P_k Э. Туркевич.

Оба описанных способа основаны на одной идее. Пусть имеется некоторая функция f, принимающая бесконечное число значений и такая, что для каждого натурального n

$$f(nt) = Q_n(f(t)),$$

где Q_n — многочлен. Тогда многочлены Q_m и Q_n коммутируют. Например, если $f(t) = e^t$, то получаем серию коммутирующих многочленов $F_n(x) = x^n$. Если $f(t) = e^t + e^{-t}$, то получаем серию многочленов P_n (это — в точности наш первый способ построения многочленов P_n, только t заменено здесь на e^t). Если $f(t) = \cos t$, то получаем серию многочленов T_n. (Те, кто знаком с комплексными числами и формулой $\cos\varphi = (e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})/2$, без труда найдут объяснение, почему функции $e^t + e^{-t}$ и $\cos t$ приводят по существу к одной и той же, с точностью до растяжения вдвое, последовательности многочленов.)

Приведенные решения пункта д) очень красивы, но обладают одним недостатком: совершенно непонятно, как до них можно додуматься. Мы приведем еще одно решение; оно будет менее коротким, но зато будет ясно, как его придумали и как быстро выписывать многочлены P_n.

Третий способ. Как вытекает из пункта б), может существовать только один многочлен P_k степени k, коммутирующий с $P_2(x) = x^2-2$. Выпишем несколько первых таких многочленов:

$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = x^2-2,$$
$$P_3(x) = x^3-3x,$$
$$P_4(x) = x^4-4x^2+2,$$
$$P_5(x) = x^5-5x^3+5x,$$
$$P_6(x) = x^6-6x^4+9x^2-2$$

(здесь $P_4(x) = P_2(P_2(x))$, $P_6(x) = P_2(P_3(x))$, $P_5(x)$ находится так же, как в пункте а)). Посмотрев на эту последовательность многочленов, можно заметить, что она удовлетворяет рекуррентной формуле $P_{k+1}(x) = xP_k(x) - P_{k-1}(x)$. Естественно предположить, что эта формула верна при всех $k>1$.

Итак, определим последовательность многочленов $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ по индукции, считая, что

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2-2,$$

а при $k>1$

$$P_{k+1}(x) = xP_k(x) - P_{k-1}(x).$$

Докажем, что все многочлены P_k коммутируют с многочленом P_2; тогда они все коммутируют между собой (пункт г)).

Проведем доказательство по индукции. Ясно, что многочлены P_1 и P_2 коммутируют с P_2; предположим, что все многочлены $P_1, P_2, \ldots$

..., P_k коммутируют с P_2, и докажем, что многочлен P_{k+1} коммутирует с P_2.

Нам нужно показать, что

$$P_{k+1}(x^2-2)=(P_{k+1}(x))^2-2.$$

Подставляя в это равенство рекуррентную формулу для P_{k+1}, перепишем его в виде

$$(x^2-2)P_k(x^2-2)-P_{k-1}(x^2-2)=$$
$$=(xP_k(x)-P_{k-1}(x))^2-2.$$

Теперь используем предположение индукции:

$$(x^2-2)(P_k(x)^2-2)-(P_{k-1}(x)^2-2)=$$
$$=(xP_k(x)-P_{k-1}(x))^2-2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим такое равенство:

$$-2(P_k(x)^2-xP_k(x)P_{k-1}(x)+$$
$$+P_{k-1}(x)^2)=2x^2-8$$

или

$$P_k(x)^2-xP_k(x)P_{k-1}(x)+$$
$$+P_{k-1}(x)^2=4-x^2. \quad (*)$$

Обозначим левую часть $(*)$ через $S_k(x)$. Нам остается доказать, что $S_k(x)$ не зависит от k (и равно $4-x^2$). Действительно, пусть $k>2$. Тогда

$$S_k(x)=P_k(x)^2-xP_k(x)P_{k-1}(x)+$$
$$+P_{k-1}(x)^2=P_k(x)[P_k(x)-$$
$$-xP_{k-1}(x)]+P_{k-1}(x)^2=$$
$$=-P_k(x)P_{k-2}(x)+P_{k-1}(x)^2=$$
$$=P_{k-2}(x)^2-xP_{k-1}(x)P_{k-2}(x)+$$
$$+P_{k-1}(x)^2=S_{k-1}(x),$$

т. е. $S_k(x)=S_{k-1}(x)$. Поскольку $S_2(x)=4-x^2$, $S_k(x)=4-x^2$ при всех $x\geqslant 2$. Таким образом, мы показали, что P_k коммутирует с P_2 при любом k.

Задачи о коммутирующих многочленах

Мы хотим обсудить задачи, связанные со следующей о б щ е й п р о б л е м о й: *описать все пары коммутирующих* (не обязательно унитарных) *многочленов P и Q.*

З а д а ч а 1. Докажите, что два многочлена P и Q первой степени коммутируют в том и только в том случае, когда либо $P(x)=x+\alpha$, $Q(x)=x+\beta$, либо существует x_0 такое, что $P(x_0)=Q(x_0)=x_0$ (общая «неподвижная» точка).

З а д а ч а 2. Решите общую проблему для случая, когда степень одного из многочленов P, Q равна 1.

В дальнейшем мы будем считать, что степени многочленов P и Q больше 1.

Пусть $P(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_{k-1}x+a_k$, $Q(x)=b_0x^e+\dots+b_{e-1}x+b_e$. Прежде всего покажем, что можно свести общую задачу к случаю, когда коэффициенты a_1 и b_1 равны 0 (многочлены такого вида называются *приведенными*). Для этого воспользуемся следующей операцией. Зафиксируем число a и с его помощью построим из каждого многочлена R новый, «сдвинутый» многочлен $R^{(a)}$ по формуле $R^{(a)}(x)=R(x-a)+a$. Ясно, что многочлен R восстанавливается по многочлену $R^{(a)}$: $R(x)=R^{(a)}(x+a)-a$.

З а д а ч а 3. а) Докажите, что если многочлены P и Q коммутируют, то $P^{(a)}$ и $Q^{(a)}$ тоже коммутируют.

б) Докажите, что любая пара коммутирующих многочленов P и Q степени больше 1 имеет вид $P=S^{(a)}$, $Q=T^{(a)}$, где a — некоторое число, а S и T — коммутирующие приведенные многочлены.

В дальнейшем мы будем считать, что многочлены P и Q приведены. Кроме того, мы будем считать, что они унитарны, то есть их старшие коэффициенты равны 1. Ясно, что это — наиболее интересный частный случай. Кроме того, рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что можно свести общую задачу к случаю, когда старшие коэффициенты многочленов P и Q равны ± 1, так что этот частный случай не сильно отличается от общего (в этих рассуждениях надо использовать операцию «растяжения», которая каждому многочлену R сопоставляет многочлен $R^{\{\lambda\}}$ по формуле $R^{\{\lambda\}}(x)=\lambda R(x/\lambda)$). Опишем несколько серий коммутирующих многочленов:

1. Пусть R — многочлен степени r. Рассмотрим серию многочленов $P_0(x)=x$, $P_1(x)=R(x)$, $P_2(x)=R(R(x))$, $P_3(x)=R(R(R(x)))$ (вообще $P_{i+1}(x)=P_i(R(x))$).

Ясно, что все многочлены P_i коммутируют и степень многочлена P_i равна r^i.

2. Серия многочленов $F_k(x)=x^k$. Все многочлены F_k коммутируют и степень многочлена F_k равна k.

3. $\{P_k\}$ — серия многочленов, построенная при решении пункта д) задачи М455. Эти многочлены определяются условием $P_k(t+t^{-1})=t^k+t^{-k}$. Степень многочлена P_k равна k.

4. Определим серию многочленов $H_1, H_3, H_5, \ldots$ таким условием: $H_k(t-t^{-1})=t^k-t^{-k}$ (k — нечетно). Легко проверить, что такие многочлены существуют и однозначно определяются выписанным условием. Все эти многочлены коммутируют и степень многочлена H_k равна k.

На самом деле, примеры 3 и 4 являются частными случаями более общего примера. Чтобы описать этот общий пример, сделаем одно замечание о коэффициентах многочленов. Мы до сих пор считали, что эти коэффициенты — действительные числа. Однако в большинстве алгебраических вопросов лучше работать с комплексными числами. Поэтому давайте считать, что коэффициентами наших многочленов могут быть любые комплексные числа.

5. Фиксируем натуральное число m и такое комплексное число λ, что $\lambda^m=1$ (для каждого m существует $m-1$ такое число, отличное от 1).

Рассмотрим такие пары чисел (u, v), что $u\cdot v=\lambda$, и положим $x=u+v$. Легко проверить, что $u^k+v^k=x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_k$, где $a_1, \ldots, a_k$—некоторые числа, зависящие от λ. Положим $P_k(x)=x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_k$; многочлен P_k характеризуется таким условием: $P_k(u+v)=u^k+v^k$, если $uv=\lambda$.

Пусть l — число, дающее при делении на m остаток 1. Тогда $u^lv^l=(uv)^l=\lambda^l=\lambda$, так что $P_k(u^l+v^l)=u^{kl}+v^{kl}$. Таким образом, если k и l дают при делении на m остаток 1, то $P_k\left(P_l(u+v)\right)=u^{kl}+v^{kl}=P_l\left(P_k(u+v)\right)$, то есть многочлены P_k и P_l коммутируют. Мы построили по числу λ серию коммутирующих многочленов $P_1, P_{m+1}, P_{2m+1}, \ldots$ Все эти многочлены унитарны, приведены и степень P_k равна k.

При $m=1$, $\lambda=1$ мы получаем пример 3, при $m=2$, $\lambda=-1$ — пример 4.

Примеры 1—5 исчерпывают все известные примеры коммутирующих многочленов, так что можно высказать гипотезу, что если P и Q — коммутирующие унитарные приведенные многочлены степени больше 1 с комплексными коэффициентами, то они входят в одну из серий, построенных в примерах 1, 2, 5.

Можно, не решая общей проблемы, попытаться ответить на некоторые частные вопросы:

1. При каких α многочлен $P(x)=x^2-\alpha$ коммутирует с каким-нибудь многочленом нечетной степени.

2. Пусть P — унитарный многочлен степени больше 1. Отметим степени всех унитарных многочленов Q, коммутирующих с P. Какое подмножество в натуральных числах при этом может получиться?

Например, в примере 1 это — геометрическая прогрессия; в примере 5 — арифметическая.

3. Пусть P, Q — коммутирующие унитарные многочлены степеней k и l. Предположим, что l делится на k. Верно ли, что Q имеет вид $Q(x)=P(R(x))$, где R — унитарный многочлен, коммутирующий с P?

Можно сформулировать более общую проблему — найти все коммутирующие рациональные функции P и Q. В этом случае появляется много новых интересных примеров.

Здесь также годится общий способ, о котором мы говорили в решении пункта д) для многочленов. Пусть имеется функция f (принимающая бесконечное число значений) такая, что

$$f(nt)=P_n(f(t)),$$

где P_n — рациональная функция. Тогда для разных n и m функции P_n и P_m коммутируют.

Возникает интересный вопрос: для каких функций f можно при любом n подобрать такую рациональную функцию P_n, чтобы $P_n(f(t))=f(nt)$. Например, легко проверить, что этому условию удовлетворяет функция $f(t)=\operatorname{tg} t$.

Можно построить другие примеры функций f, используя теорию эллиптических функций. Поскольку это — неэлементарная теория, мы не будем здесь описывать соответствующее построение.

Все эти примеры показывают, что задача об описании коммутирующих многочленов (и, более общо, коммутирующих рациональных функций) непосредственно связана с очень глубокими и красивыми математическими теориями. Решение этой задачи, видимо, откроет какие-то новые, неизвестные ранее факты. Короче говоря, это задача, которой стоит заниматься.

задачник Кванта

Задачи

М556—М560; Ф568—Ф572

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 июня 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М556, М557» или «Ф568». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М556. Обязательно ли конгруэнтны два остроугольных равнобедренных треугольника, имеющих равные по длине боковые стороны и равные радиусы вписанных окружностей?

А. Егоров

М557. Дано n попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$. Докажите, что среди них обязательно встретится простое число.

А. Колотов

М558. В круге расположено $k>1$ черных секторов, угол каждого из которых меньше $180°/(k^2-k+1)$. Докажите, что круг можно повернуть вокруг центра O так, что все черные секторы перейдут в белую часть круга.

В. Произволов

М559. Докажите, что если x, y, z — длины сторон треугольника, то

$$\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-\frac{y}{x}-\frac{z}{y}-\frac{x}{z}\right|<1.$$

А. Ермилов

М560. В дне ящика имеется дырка. Нужно сделать выпуклую заслонку наименьшей площади, при любом положении которой на дне ящика дырка будет закрыта. Решите эту задачу, если:

а) дно ящика — квадрат 4×4, а дырка 1×1 расположена так, как показано на рисунке 1;

б) дно ящика — квадрат $n\times n$ (n нечетно), а дырка 1×1 расположена в центре (рис. 2);

в)* попробуйте решить аналогичную задачу для каких-либо других случаев, когда дно и дырка — выпуклые фигуры.

В. Батырев

Ф568. При бомбардировке литиевой мишени протонами с энергией не меньше 1,88 МэВ может происходить ядерная реакция

$$^7\mathrm{Li}+p\to{}^7\mathrm{Be}+n.$$

При какой энергии протонов образующиеся в реакции нейтроны могут лететь назад от литиевой мишени?

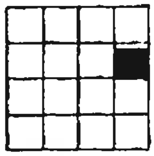


Рис. 1.

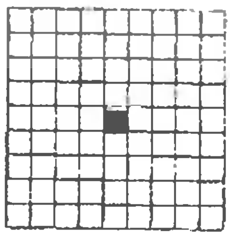


Рис. 2.

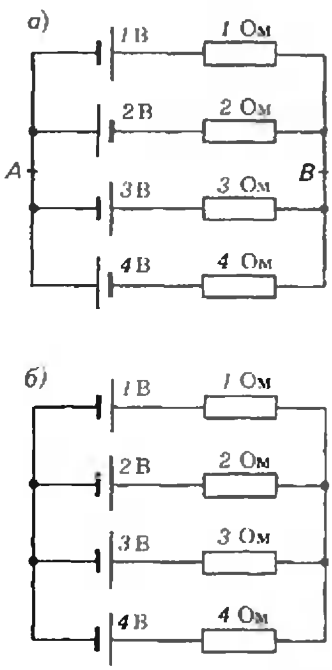


Рис. 3.

Ф569. Электрическим кипятильником мощностью $W = 500$ Вт нагревают воду в кастрюле. За две минуты температура воды увеличилась от 85°С до 90°С. Затем кипятильник выключили и за одну минуту температура воды упала на один градус. Сколько воды находится в кастрюле? Удельная теплоемкость воды равна $4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

Е. Сурков

Ф570. Из-за наличия объемного заряда в межэлектродном пространстве плоского диода распределение потенциала $\varphi(x)$ между катодом и анодом имеет вид: $\varphi(x) = x^2 - 2x$ (x — в мм, а φ — в вольтах). Расстояние между катодом и анодом $d = 10$ мм. Координата x совпадает с расстоянием до катода. Определить, при какой минимальной кинетической энергии электрон с поверхности катода сможет достичь анода. Каким будет максимальное ускорение электронов, которые достигнут анода?

Ф571. Батареи и резисторы собирают в цепь двумя способами — как на рисунке 3, *а* и как на рисунке 3, *б*. Определить токи, текущие через резисторы в обоих случаях. Сопротивлениями источников тока и соединительных проводов пренебречь. Как изменятся токи в случае *а*, если разрезать провода в точках A и B?

Ф572. Перрен исследовал зависимость от высоты числа шарообразных частиц особой смолы — гуммигута во взвеси этих частиц в воде. Для частиц радиусом $r_1 = 0{,}212$ мкм он получил зависимость, график которой показан на рисунке 4 (n — концентрация частиц на высоте h, n_0 — их концентрация у дна кюветы). Такой же график получается для частиц с радиусом $r_2 = 0{,}106$ мкм, только картина растянута по высоте в 8 раз. В то же время известно, что плотность кислорода в земной атмосфере убывает с высотой так, как показано на рисунке 5 (ρ — плотность кислорода на высоте H, ρ_0 — у поверхности кюветы). Определить массу молекулы кислорода.

Плотность гуммигута $\rho_г = 1{,}194$ г/см³.

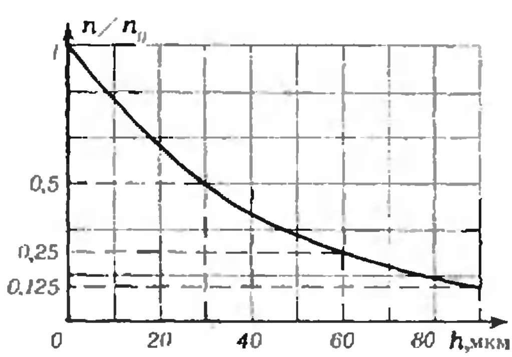


Рис. 4.

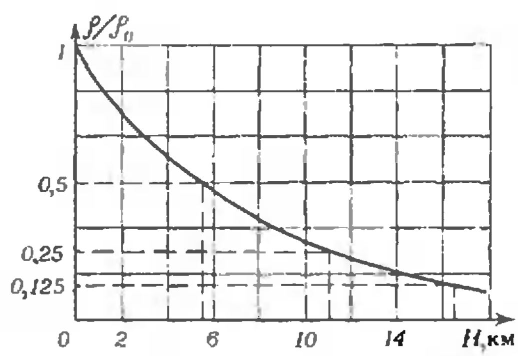


Рис. 5.

Решения задач

М508—М512; Ф515, Ф518—Ф520

М508. *Окружность касается трех полуокружностей с диаметрами [AB], [BC] и [AC] ($C \in [AB]$, рис. 1). Докажите, что радиус окружности вдвое меньше расстояния от ее центра до прямой AB.*

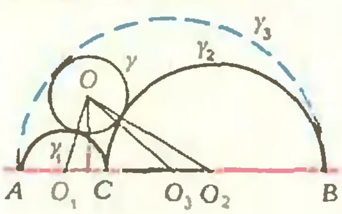


Рис. 1.

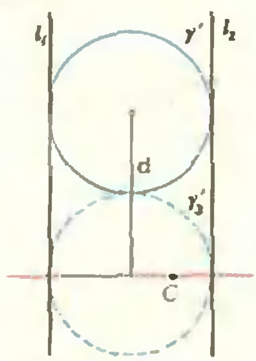


Рис. 2.

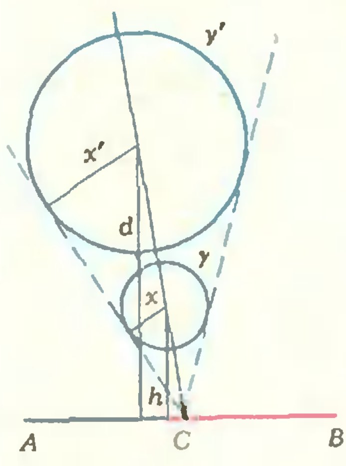


Рис. 3.

Пусть O_1 — центр полуокружности γ_1 с диаметром $[AC]$, O_2 — центр полуокружности γ_2 с диаметром $[BC]$, O_3 — центр полуокружности γ_3 с диаметром $[AB]$, и, наконец, O — центр окружности γ, касающейся трех данных полуокружностей (рис. 1). Обозначим длины радиусов окружностей γ_1, γ_2 и γ, соответственно, через r, R и x. Тогда длина радиуса полуокружности γ_3 равна $R+r$.

Рассмотрим треугольник O_1OO_2. Имеем: $|O_1O| = r + x$, $|OO_2| = R + x$, $|O_1O_2| = R + r$. Обозначим расстояние от центра O до прямой AB через h. Записав площадь треугольника O_1OO_2 по формуле Герона и через длины основания $[O_1O_2]$ и высоты, опущенной из вершины O, получим уравнение

$$\sqrt{Rrx(R+r+x)} = \frac{1}{2}(R+r)h.$$

Аналогичное уравнение для треугольника O_1OO_3 имеет вид

$$\sqrt{rx(R+r)(R-r)} = \frac{1}{2}Rh.$$

Возводя левую и правую части обоих уравнений в квадрат и затем вычитая из одного уравнения другое, получаем

$$rx[R(R+r+x)-(R+r)](R-r)] = \frac{1}{4}h^2[(R+r)^2-R^2],$$

откуда $x^2 = h^2/4$, то есть $x = h/2$, что и требовалось.

Эту задачу можно решить более изящно, если применить инверсию (об инверсии и ее свойствах см. «Квант» — 1974, № 1, с. 16, 1976, № 2, с. 34, 1977, № 6, с. 38).

Произведем инверсию I относительно произвольной окружности с центром в точке C. При этой инверсии окружности γ_1, γ_2, γ_3 и γ преобразуются так, как показано на рисунке 2: окружности γ_1 и γ_2 перейдут, соответственно, в прямые l_1 и l_2, перпендикулярные $[AB]$, а окружности γ_3 и γ — соответственно в окружности γ_3' и γ', касающиеся прямых l_1 и l_2, причем центр окружности γ_3' принадлежит прямой AB (эта прямая на рисунках 1 и 2 выделена красным цветом).

Легко сообразить, что окружности γ и $\gamma' = I(\gamma)$ гомотетичны с центром гомотетии C. Это видно из рисунка 3: проходящие через точку C касательные к окружности γ при инверсии I переходят в себя и являются касательными к окружности $\gamma' = I(\gamma)$. Обозначим радиус окружности γ' через x', а через d — расстояние от центра окружности γ' до прямой AB. Поскольку γ и γ' гомотетичны, имеем $h/d = x/x'$ (h — расстояние от центра окружности γ до прямой AB, x — радиус γ). Но, очевидно, $x' = d/2$ (окружности γ' и γ_3' — одинакового радиуса, см. рис. 2), так что $x = h/2$, что и требовалось доказать.

В. Сендеров, И. Шарыгин

◆

М509. *Решите в натуральных числах уравнения:*
а) $2^x+1=3^y$;
б) $z^x+1=(z+1)^2$;
в) $z^x+1=(z+1)^y$.

Нетрудно видеть, что уравнения а) и б) — частные случаи уравнения в) при $z=2$ и $y=2$ соответственно. Мы разберем случай а) отдельно, а затем решим уравнение в).

а) Если $x=1$, то и $y=1$.

Пусть $x>1$. Тогда $2^x+1 \equiv 1 \pmod 4$, откуда следует, что y — четное число (если y нечетно, то $3^y \equiv 3 \pmod 4$, и равенство $2^x+1=3^y$ невозможно). Итак, $y=2k$, $2^x=3^{2k}-1$, то есть $2^x=(3^k-1)(3^k+1)$. Поскольку $x>1$, оба множителя 3^k-1 и 3^k+1 должны быть степенями двойки (отличающимися друг от друга на 2). Это возможно только при $k=1$. Поэтому $y=2$, так что $2^x+1=9$, и $x=3$.

Итак, у уравнения а) два решения: (1; 1) и (3; 2).

в) Решение уравнения в) проведем в несколько этапов.

Пусть z имеет простой делитель p: $z=p^m z_1$, $m\geq 1$, z_1 взаимно просто с p. Пусть $y=p^n y_1$, где $n\geq 0$ и НОД $(y_1, p)=1$.

Рассмотрим выражение $(1+z)^{y_1}$. Имеем:

$$(1+z)^{y_1}=1+y_1z+C_{y_1}^2z^2+\ldots+z^{y_1}=$$
$$=1+z\left(y_1+C_{y_1}^2z+\ldots+z^{y_1-1}\right).$$

Поскольку y_1 не делится на p (будем записывать это так: $y_1\not\equiv 0 \pmod p$), получаем

$$(1+z)^{y_1}=1+p^m A, \text{ где } A\equiv y_1z_1 \pmod p).$$

Рассмотрим теперь $(1+z)^y$. Докажем следующее вспомогательное утверждение (верное, впрочем, при некоторых ограничениях): для любого натурального B

$$(1+p^iB)^p=1+p^{i+1}D(i>0),$$

причем $B\equiv D \pmod p$. В самом деле, применим формулу бинома Ньютона:

$$(1+p^iB)^p=1+C_p^1\cdot p^iB+C_p^2\cdot p^{2i}B^2+\ldots$$
$$\ldots+p^i{}_pB^p=1+p^{i+1}B+C_p^2\cdot p^{2i}B^2+\ldots+p^i{}_pB^p.$$

Легко видеть, что если $2i>i+1$, то есть $i>1$, то утверждение справедливо. Если же $i=1$, то коэффициент при p^{i+1} будет равен $B+C_p^2B^2$. Если p — нечетное, то C_p^2 делится на p, так что $B+C_p^2B^2\equiv B \pmod p$, и наше утверждение для нечетных p верно и в этом случае.

Пусть z имеет нечетный простой делитель p. Применим доказанное утверждение к выражению $(1+z)^y$. Имеем:

$$(1+z)^y=\left((1+z)^{y_1}\right)^{p^n}=(1+p^mA)^{p^n}=$$
$$=(1+p^{m+1}A_1)^{p^{n-1}}=\ldots=1+p^{m+n}A_n,$$

причем $A\equiv A_1\equiv\ldots\equiv A_n \pmod p$, то есть A_n на p не делится. Мы ищем решение уравнения в): $(1+z)^y=1+z^x$, или $p^{m+n}A_n=p^{mx}z_1^x$. Поскольку $z_1\not\equiv 0 \pmod p$, должно выполняться равенство

$$m+n=mx.$$

С другой стороны, очевидно, что $x\geq y$. Если $x>y$, то $x>p^n$, откуда

$$m+n>mp^n\geq m(1+n(p-1)),$$

и $n>mn(p-1)$, что невозможно.

Аналогично разбирается случай, когда у z нет нечетных делителей, но оно делится на 4. Таким образом, если $x>0$, то уравнение в) не может иметь таких решений $(x, y; z)$ в натуральных числах, что z делится на нечетное число или на 4. Случай $z=2$ разобран в пункте а). Остается рассмотреть случай, когда $z=1$, и случай $x=y$.

Если $z=1$, получаем уравнение $1^x+1=2^y$, $2^y=2$, откуда $y=1$, x — любое.

В случае $x=y$ имеем:

$$z^x+1=(z+1)^x,$$

то есть

$$1=(z+1)^x-z^x=[(z+1)-z]\times$$
$$\times[(z+1)^{x-1}+(z+1)^{x-2}z+\ldots+z^{x-1}]=$$
$$=(z+1)^{x-1}+(z+1)^{x-2}z+\ldots+z^{x-1}\geq x.$$

Таким образом, $x=y=1$, z — любое.

Итак, уравнение в) имеет два набора решений:
$(x;\ 1;\ 1)$, x — любое,
$(1;\ 1;\ z)$, z — любое,
и два решения, получающиеся при $z=2$:
$(1;\ 1;\ 2)$ и $(3;\ 2;\ 2)$.

Теперь нетрудно видеть, что уравнение б) (являющееся частным случаем уравнения в) при $y=2$) имеет единственное решение: $x=3$, $z=2$.

Л. Лиманов

◆

М510. *В книге «Венгерские математические олимпиады» приводится такая задача (№ 148): «Доказать, что для всех положительных $\alpha<\pi$ выполнено неравенство*

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha>0».$$

Докажите следующее обобщение этого неравенства: для всех $0<\alpha<\pi$ и натурального n

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha+\cdots+\frac{1}{n}\sin n\alpha>0.$$

Докажем это неравенство по индукции.

1. При $n=1$ неравенство справедливо: $\sin\alpha>0$, если $\alpha\in\ ]0;\ \pi[$.

При $n=2$ имеем:

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)>0 \text{ если } \alpha\in\ ]0;\ \pi[.$$

2. Пусть $S_{n-1}(\alpha)=\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)\alpha>0$ при $\alpha\in\ ]0;\ \pi[$. Докажем, что функция $S_n(\alpha)=S_{n-1}(\alpha)+\frac{1}{n}\sin n\alpha$ также положительна при $\alpha\in\ ]0;\ \pi[$. Предположим противное. Тогда $S_n(\alpha)$ имеет минимум в искомой точке $\alpha_0 (0<\alpha_0<\pi)$, причем $S_n(\alpha_0)\leqslant 0$. При этом $S_n'(\alpha_0)=\cos\alpha_0+\cos 2\alpha_0+\ldots+\cos n\alpha_0=$

$$=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha_0\right]-\sin\frac{\alpha_0}{2}}{2\sin\frac{\alpha_0}{2}}=0.$$

Значит, $\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha_0\right]=\sin\frac{\alpha_0}{2}$, откуда

$$\left|\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha_0\right]\right|=\cos\frac{\alpha_0}{2}.$$

Поэтому $S_n(\alpha_0)-S_{n-1}(\alpha_0)=\frac{1}{n}\sin n\alpha_0=\frac{1}{n}\left\{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha_0\right]\cos\frac{\alpha_0}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha_0\right]\sin\frac{\alpha_0}{2}\right\}\geqslant 0$,

то есть $S_{n-1}(\alpha_0)\leqslant S_n(\alpha_0)\leqslant 0$, что противоречит предположению индукции. Поэтому $S_n(\alpha)>0$ при всех $\alpha\in\ ]0;\ \pi[$.

Рассмотренная сумма

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$$

является частичной суммой бесконечного тригонометрического ряда, про который можно доказать, что он на интервале $]-\pi;\ \pi[$ *сходится к функции* $\frac{x}{2}$, а на всей прямой — к периодическому продолжению (с интервала $]-\pi;\ \pi[$) этой функции. Коэффициенты $\frac{1}{k}$ этого ряда связаны с функцией $\frac{x}{2}$ *формулами Фурье*:

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\sin kx\,dx,$$

а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ является *рядом Фурье* функции $\frac{x}{2}$.

Теория рядов Фурье — бесконечных суммы вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ — чрезвычайно важный и богатый результатами раздел математического анализа. Неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}>0$$

(для любого натурального n и $x \in]0;\pi[$) было доказано Липотом Фейром (1880—1959), известным венгерским математиком, внесшим значительный вклад в развитие теории тригонометрических рядов (ему, в частности, принадлежит один из первых примеров расходящегося в точке ряда Фурье непрерывной функции).

В. Скворцов

◆

M511. *Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M такая, что четырехугольник $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\widehat{CBM}=\widehat{CDM}$, то $\widehat{ACD}=\widehat{BCM}$.*

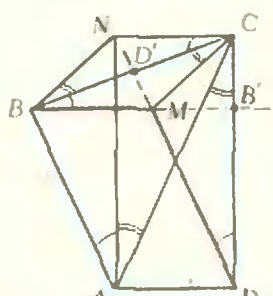


Рис. 4.

Проведем $(NC)\|(BM)$ и $(BN)\|(MC)$ (рис. 4). Тогда четырехугольники $BNCM$ и $ANCD$ — параллелограммы, откуда следует, что $\widehat{NAB}=\widehat{CDM}$, $\widehat{NCB}=\widehat{CBM}$.

По условию $\widehat{CBM}=\widehat{CDM}$; следовательно, $\widehat{NAB}=\widehat{NCB}$ и точки A, B, N, C лежат на одной окружности. Поэтому $\widehat{NBC}=\widehat{NAC}$. Но $\widehat{NBC}=\widehat{BCM}$, а $\widehat{NAC}=\widehat{ACD}$ (четырехугольники $BNCM$ и $ANCD$ — параллелограммы). Поэтому $\widehat{BCM}=\widehat{ACD}$, что и требовалось доказать.

Ю. Михеев

Приведем еще одно решение этой задачи, основанное на том, что четырехугольники $ABCD$ и $MB'CD'$ подобны; здесь $B'=(BM)\cap(DC)$, $D'=(DM)\cap(BC)$. Действительно, у этих четырехугольников угол C общий, а остальные углы попарно конгруэнтны: $\hat{A}=\hat{M}$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{D}=\hat{D}'$. Однако одной конгруэнтности углов для подобия четырехугольников недостаточно. Заметим теперь, что треугольники $BD'M$ и DMB' подобны. Из этого подобия и того, что четырехугольник $ABMD$ — параллелограмм, вытекает равенство

$$\frac{|MB'|}{|AB|}=\frac{|MD'|}{|AD|},$$

из которого уже следует подобие четырехугольников $ABCD$ и $MB'CD'$. Из этого подобия в свою очередь следует, что $\widehat{ACD}=\widehat{MCD'}(=\widehat{MCB})$.

Л. Лиманов

◆

M512. *Пусть $f(x)=x^3-x+1$. Докажите, что для любого натурального $m>1$ числа m, $f(m)$, $f(f(m))$, $f(f(f(m)))$, ... попарно взаимно просты.*

Положим $f_1(x)=x^3-x+1$, и для каждого $n=2, 3, \ldots$ $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$.
Тогда $f_1(0)=f_1(1)=1$ и (по индукции) $f_n(0)=f_n(1)=1$ для каждого n. Таким образом, свободный член $f_n(0)$ многочлена $f_n(x)$ с целыми коэффициентами равен 1. Поэтому *при любом натуральном n и целом a* число $f_n(a)$ дает при делении на a остаток 1. Отсюда следует, что при любых целых $k>l>0$ и m число $f_k(m)=f_{k-l}(f_l(m))$ при делении на $f_l(m)$ дает в остатке 1, так что $f_k(m)$ и $f_l(m)$ взаимно просты.

Возникает естественный вопрос: *каков должен быть многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, чтобы для не-*

$x(x-1)r(x)+1;$
$x(x+1)[(x-1)r(x)-1]+1;$
$x[(x^2-1)r(x)-2x]+1;$
$x(x-1)[(x+1)r(x)+1]-1;$
$x[(x^2-1)r(x)+2x]-1;$
$x(x+1)r(x)-1$
(здесь $r(x)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами).

го выполнялось условие задачи:

для любого натурального m числа (*)
$m, f(m), f(f(m)), \ldots$ попарно взаимно просты.

Из нашего решения ясно, что для этого достаточны условия $f(0)=f(1)=1$, другими словами, любой многочлен вида $f(x) = x(x-1)r(x)+1$ (где $r(x)$ — любой многочлен с целыми коэффициентами) удовлетворяет условию (*). Оказывается, полный ответ на наш вопрос таков: многочлен $f(x)$ удовлетворяет условию (*) тогда и только тогда, когда он принадлежит одному из шести типов, приведенных на полях.

Заметим, что в решении задачи мы построили бесконечную последовательность натуральных чисел, в которой все числа попарно взаимно просты (например: 2, $f_1(2)=7$, $f_2(2)=f_1(7)=337$, ..., $f_n(2)$, ...). Из существования такой последовательности сразу вытекает бесконечность множества простых чисел.

А. Колотов

◆

Ф515. *Легкий стержень длины l закреплен в вертикальной плоскости на оси, проходящей через точку O, которая делит стержень в отношении $1:3$. К одному из концов стержня прикреплен тяжелый шарик массы m, другой конец стержня прикреплен к горизонтальной пружине жесткости k (рис. 5). Пружина не растянута, когда стержень вертикален. Определить период малых колебаний стержня.*

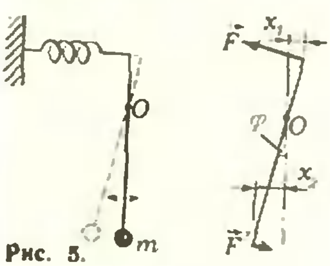


Рис. 5.

Смещение верхнего и нижнего концов стержня от вертикали при колебаниях обозначим соответственно x_1 и x_2. Тогда

$$x_1 = \frac{l}{4}\sin\varphi, \quad x_2 = \frac{3l}{4}\sin\varphi.$$

Проекции сил, действующих на шарик, на ось X, касательную к траектории движения шарика (рис. 5), равны $-m|\vec{g}|\sin\varphi$ и $-|\vec{F}'|$, где $\vec{F}'$ — сила нормальной реакции стержня. Так как стержень невесом, моменты сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ равны. Следовательно,

$$|\vec{F}'|\frac{3}{4}l = |\vec{F}|\frac{1}{4}l,$$

откуда

$$|\vec{F}'| = \frac{kx_1}{3} = \frac{1}{12}kl\sin\varphi.$$

Теперь запишем уравнение движения маятника:

$$-m|\vec{g}|\sin\varphi - |\vec{F}'| = ma_\tau,$$

или

$$\frac{1}{m}\left(\frac{kl}{12}\sin\varphi + m|\vec{g}|\sin\varphi\right) = \omega_0^2\frac{3l}{4}\sin\varphi.$$

Выражая циклическую частоту ω_0 через период T и сокращая на $\sin\varphi$, находим T:

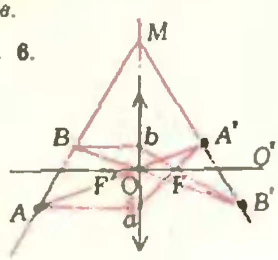
$$T = 6\pi\sqrt{\frac{lm}{kl+12m|\vec{g}|}}.$$

Ю. Левчук

◆

Ф518. *На рисунке 6 показано положение двух точек A и B и их изображений A' и B', которые дает тонкая линза. Найти построением положение линзы и ее фокусов.*

Рис. 6.



Лучи, идущие без преломления из точки A в точку A' и из точки B в точку B', проходят через оптический центр линзы. Следовательно, точка O — оптический центр линзы (см. рис. 6).

Луч, проходящий через точки A и B, после преломления в линзе проходит через точки A' и B'. Следовательно, точка M — точка пересечения лучей AB и $A'B'$ — лежит в плоскости линзы.

Итак, положение линзы мы определили. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна плоскости линзы. Лучи Aa и Bb, параллельные главной оптической оси, после преломления проходят через фокус линзы. Следовательно, F и F' — фокусы линзы, OO' — главная оптическая ось линзы.

Ф519. *Груз A подвешен к пружине BC с помощью нити AB (рис. 7). Какова должна быть амплитуда колебаний груза, чтобы эти колебания были гармоническими? Масса груза $m = 0{,}1$ кг, жесткость пружины $k = 1600$ Н/м.*

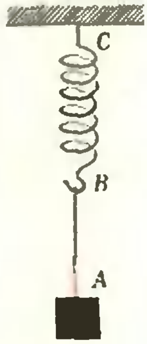


Рис. 7.

Если колебания груза гармонические, то есть его смещение x от положения равновесия меняется со временем по закону

$$x = A\cos\omega t$$

(A — амплитуда, ω — частота колебаний), то ускорение груза равно

$$a = x'' = -A\omega^2\cos\omega t.$$

Модуль ускорения максимален при $x = \pm A$. Так как груз прикреплен к пружине с помощью нити, ускорение груза *в верхней точке* не может быть больше $\vec{g}$; следовательно,

$$|\vec{a}| \leqslant |\vec{g}|, \text{ или } A\omega^2 \leqslant |\vec{g}|.$$

Отсюда находим, что

$$A \leqslant \frac{|\vec{g}|}{\omega^2}.$$

Частота гармонических колебаний груза совпадает с частотой колебаний пружины, то есть $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Таким образом,

$$A \leqslant \frac{|\vec{g}|m}{k} \approx 0{,}06 \text{ см.}$$

◆

Ф520. *В проточном калориметре (рис. 8) исследуемый газ пропускают по трубопроводу и нагревают с помощью спирали. Газ поступает в калориметр при температуре $t_1 = 20°C$. При мощности нагревателя $W_1 = 1$ кВт и расходе газа $m_1 = 540$ кг/ч температура газа за нагревателем оказалась такой же, как при мощности нагревателя $W_2 = 2$ кВт и расходе газа $m_2 = 720$ кг/ч. Давление газа в трубе всюду одинаково. Найти температуру газа t_2, если его теплоемкость при постоянном объеме $c_V = 21$ Дж/(моль·К), а молярная масса газа $M = 29$ кг/кмоль.*

Рис. 8.

Выделяемая нагревателем энергия расходуется на изменение внутренней энергии газа ($\Delta E_{вн}$), совершение работы (A) и на потери энергии из-за теплоотвода от калориметра. Эти потери зависят от разности температур калориметра и среды. Так как температуры в первом и втором случаях одинаковы, одинаковы и потери энергии. Следовательно,

$$W_1 = \Delta E_{вн.1} + A_1 + Q,$$
$$W_2 = \Delta E_{вн.2} + A_2 + Q,$$

откуда

$$W_2 - W_1 = \Delta E_{вн.2} - \Delta E_{вн.1} + A_2 - A_1.$$

Но $\Delta E_{вн} = \frac{c_V}{M} m(t_2 - t_1)$ $\left(\text{так как } c_V \text{— теплоемкость моля газа, удельная теплоемкость газа равна } \frac{c_V}{M}\right)$,

$A = p\Delta V = \frac{m}{M}R\Delta T = \frac{m}{M}R(t_2 - t_1)$. Таким образом,

$$W_2 - W_1 = \frac{c_V}{M}(t_2 - t_1)(m_2 - m_1) + \frac{R}{M}(t_2 - t_1)(m_2 - m_1).$$

Отсюда

$$t_2 - t_1 = \frac{(W_2 - W_1)M}{(c_V + R)(m_2 - m_1)} \approx 20° \text{ C}, \quad t_2 \approx 40° \text{ C}.$$

И. Слободецкий

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М506—М515 и Ф508—Ф522 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Н. Абдибеков (Аральск) **5а), в)**; *К. Абдухаликов* (Алма-Ата) **7а), 8, 9, 1, 2, 5а), в)**; *Е. Абрамочкин* (Куйбышев) **1, 5в)**; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) **8, 9в), б), 1, 2**; *С. Азнабаев* (Новотроицк Оренбургской обл.) **7а), 8, 9б), 2, 5в)**; *В. Айриян* (Раздан) **1, 2**; *К. Архангельский* (Киев) **8, 9б), 5в), б)**; *Б. Баасандорж* (МНР) **9в), б)**; *А. Бадалян* (пос. Берд АрмССР) **2, 5**; *Б. Байсакалов* (*Алма-Ата*) **7а), 8, 9а), б), 1, 5а), в), г)**; *К. Бакланов* (Тула) **9б)**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **9б), 1—3, 5в)**; *А. Барг* (Николаев) **5а, в)**; *Д. Баттулга* (МНР) **2**; *Б. Бегун* (Москва) **5а), в), г)**; *А. Бекжанов* (Алма-Ата) **8**; *С. Беспамятных* (Артемовский Свердловской обл.) **2**; *Н. Бовсуновский* (с. Путниловичи Житомирской обл.) **8, 1**; *В. Болотников* (Харьков) **8, 9а), б), 2, 3, 5**; *А. Боричев* (Ленинград) **1—4, 5а), в)**; *Ю. Бусин* (Черемхово) **9в), б)**; *А. Васильев* (Саратов) **2**; *В. Виноградов* (Казань) **9а), б)**; *В. Виноградов* (Москва) **8, 0—2, 4, 5а), б), в), г)**; *И. Власов* (Мичуринск) **9а), б)**; *А. Воронин* (Бугуруслан) **8**; *А. Воронов* (Москва) **5в), б)**; *А. Галенко* (Пенза) **1, 5а)**; *А. Гильман* (Москва) **8, 9а), б), 1—3, 5а)**; *Л. Гитлин* (Витебск) **5а), б)**; *Ю. Глухов* (Щелково) **8, 1**; *А. Головин* (Москва) **9в), б), 2, 5а)**; *О. Гордиенко* (Павлодар) **9б), 1, 2, 5а), в), г)**; *М. Горелов* (Белорецк) **8, 9а), б), 1—3**; *Е. Горелова* (Саратов) **7а), 8, 9а), б)**; *Г. Грабарник* (Ташкент) **6, 7а), 8, 9а), б), 1, 2, 4, 5**; *Н. Гринберг* (Киев) **2, 5а), б)**; *В. Губа* (Вологда) **6, 7а), 8, 9а), б), 0—4, 5а), б), в)**; *С. Гузов* (Львов) **5а)**; *В. Джалоян* (с. Урцадзор АрмССР) **1**; *В. Димантман* (Баку) **8, 9б)**; *О. Дмитриев* (Саратов) **8, 9а, б), 2, 5в)**; *С. Довбыш* (Москва) **1—4, 5а), б), в)**; *А. Дороговцев* (Киев) **2**; *И. Елишевич* (Чернигов) **9в), б), 5а)**; *А. Ермолин* (Петрозаводск) **9б), 5в), в)**; *И. Ефимов* (Красноярск) **5а)**; *С. Забаринов* (д. Харчи Ивановской обл.) **2**; *В. Забелин* (Саратов) **8, 1, 3, 5а), в), г)**; *Д. Захаров* (Москва) **8, 9а), б)**; *А. Захарян* (Сочи) **5в)**; *И. Зверович* (Минск) **9в), 2, 5а), в)**; *М. Зельдич* (Киев) **2—4**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **2**; *М. Ибрагимов* (Шуша) **9б), 2**; *Е. Ивченко* (Винница) **2**; *О. Ижболдин* (Ленинград) **6, 7а); 0**; *Р. Измайлов* (Баку) **8, 1—5**; *К. Ильин* (Вильнюс) **9а), б)**; *А. Исмайлов* (с. Чайрасуллу АзССР) **1**; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) **8, 9а), б), 1, 2, 5в), в), г)**; *С. Калашников* (Рязань) **5в), г)**; *А. Каплан* (Сумгаит) **6, 7а), 8, 9а), б), 1—3, 5в)**; *Г. Карагулян* (Ереван) **6, 8, 9в), 1—3**; *А. Келарев* (Свердловск) **8, 9в), б), 2, 3, 5**; *А. Коломыцев* (Ангарск) **1, 5а), в)**; *А. Король* (Ташкент) **5а)**; *И. Коростишевский* (Орск) **5в)**; *Д. Кофман* (Киев) **8**; *С. Кочетов* (п/о Дружба Краснодарского края) **1, 2, 5в)**; *О. Кравец* (Воронеж) **2, 3**; *С. Кузнецов* (Ангарск) **7, 8, 0—3, 5б), в), г), д)**; *Е. Кузьмин* (Череповец) **6, 7а), 1—3, 5а), в), г)**; *А. Кулагин* (Москва) **1, 5а)**; *А. Кулеско* (*Донецк*) **7а), 8, 9, 2, 4, 5а), б)**; *Ю. Лапуста* (Тернополь) **8, 9б), 2, 5**; *А. Латифуллин* (п. Азнакаево ТатАССР) **2**; *Д. Людмирский* (Киев) **5а)**; *К. Маринов* (НРБ) **8, 9а), б), 0**; *В. Матчишин* (Целиноград) **8, 9б), 2, 5в), г)**; *Р. Мешойрер* (Москва) **8, 9б), 1, 2, 5в)**; *Б. Меламед* (Запорожье) **5а)**; *А. Миндлин* (Саратов) **8, 9б), 2, 5а), в)**; *Д. Миндлин* (Ташкент) **1—3, 5в), г)**; *С. Морейно* (Москва) **2, 5а), в)**; *О. Мурсакулийев* (Сиазань) **9а), б)**; *Б. Надеждин* (Долгопрудный) **1—3, 5а) в), г)**; *О. Намазов* (с. Фахрало ГрССР) **9а), б)**; *Н. Нестеренко* (Новосибирск) **0**; *В. Никитюк* (Москва) **5а), б)**; *А. Николаев* (д. Октябрь ТатАССР) **1**; *С. Новиков* (Херсон) **2, 5в), г)**; *А. Опарин* (Горький) **7а), 8, 9б), 0—5**; *А. Орехов* (Херсон) **9б), 2, 5а)**; *С. Осенний* (Киев) **9б)**; *Е. Палош* (Ворошиловград) **8, 9, 2, 5а), в)**; *А. Петров* (Красногорск Московской обл.) **8**; *В. Подругина* (Ангарск) **8**; *В. Подстригач* (Львов) **2, 5а)**; *Л. Полтерович* (Москва) **2**; *А. Попелюхин* (Киев) **1, 2, 5а), б)**; *В. Процишин* (с. Песчаное Павлодарской обл.) **8, 9а), б), 2, 5а), в), г)**; *Б. Рабинович* (Тула) **2, 5а), в)**; *Г. Рыбкин* (Смоленск) **1, 5а)**; *И. Савенков* (Москва) **8, 9а), б), 1, 2**; *М. Севрюк* (Москва) **7а), 8—3, 5а), б)**; *А. Сивацкий* (Ленинград) **6, 7в), 8—2**; *Я. Соколовский* (с. Михайловичи Львовской обл.) **8**; *С. Стадниченко* (Пенза) **9б, 1, 5а)**; *Ф. Сукочев* (Ташкент) **6, 7а), 8, 9а), б), 1, 2, 4, 5б), в), г), д)**; *О. Тавгень* (Минск) **6, 9а), б), 0, 2, 5в), в)**; *К. Таталян* (Ереван) **2, 3, 5а)**; *Н. Трифонов* (Канск) **2, 4, 5а), в), г)**; *Ю. Трофимчук* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) **9**; *С. Трохов* (Оренбург) **8, 9а), б), 0, 2, 5в), г)**; *Д. Тураев* (Горький) **8, 2, 5а)**; *В. Уманский* (Баку) **8, 9в), б), 5в)**; *В. Фарбер* (Баку) **9б)**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **8, 9в), б), 1, 2, 5а), в), г)**; *Л. Цаленко* (Москва) **2, 3, 5а), б), в)**; *П. Чеботарев* (Москва) **9а), б)**; *И. Черная* (Ленинград) **9а), б)**; *В. Шарафян* (Ереван) **8**; *С. Шарипов* (Каракуль УзССР) **2**; *Е. Шкляр* (Гомель), **2, 5а)**; *Ф. Эрдман* (ГДР) **9б)**; *М. Эфроимский* (Ленинград) **6, 9б), 0, 2, 5а)**; *В. Якубович* (Москва) **5а)**; *А. Ялышев* (Тула) **7а), 9б), 2, 5а)**; *П. Ярошевский* (Донецк) **5а)**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф508—Ф522**, справились с задачами **Ф508** и **Ф521**. Остальные задачи правильно решили: *А. Аннабаев* (Чимкент) **11**; *А. Арбатский* (Благовещенск Амурской обл.) **13, 17—19**; *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) **13**; *Ю. Балаян* (Баку) **15**; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **10, 15, 18, 19, 22**;

(Продолжение см. на с. 36)

В. Дубровский

Площадь поверхности по Минковскому

Длина дороги равна ее площади, деленной на ее ширину.
(Из лекции для школьников)

В предшествующей заметке о площади поверхности («Квант», 1978, № 5) мы рассказали о том, как не следует ее определять. Мы показали там, что для этой цели не подходят ни развертка, ни приближение многогранными поверхностями.
В данной заметке будет предложен корректный способ определения площади поверхности, придуманный выдающимся немецким физиком и математиком Г. Минковским (1864—1909). Его определение отличается общностью и простотой. Оно позволяет легко вычислять площади простейших поверхностей. В «Геометрии 10» это определение используется при нахождении площади сферы (§ 69) и площади поверхностей цилиндра, конуса и шарового сегмента (приложение к гл. VI).

Идея определения Минковского очень наглядна. Представим себе слой постоянной толщины, «окутывающий» поверхность. Интуитивно ясно, что его объем $V(\delta)$ (2δ — толщина слоя) примерно равен $2\delta\cdot S$, где S — площадь рассматриваемой поверхности. Вычислив величину $V(\delta)/2\delta$, мы найдем приближенное значение S, причем приближение будет тем лучше, чем меньше δ.

Переведем эту идею на язык математики. Математическим эквивалентом «слоя постоянной толщины» является понятие окрестности фигуры *). Дадим определение этого понятия. Пусть Φ — произвольная фигура в пространстве, δ — положительное число. Множество Φ_δ точек P пространства, удаленных от Φ на расстояние, не превышающее δ,

$$\rho(P\ \Phi)\leqslant\delta$$

называется (замкнутой *)) *δ-окрестностью фигуры Φ*.

Чтобы это определение стало понятным, надо определить понятие расстояния от точки до фигуры. Под *расстоянием $\rho(P,\Phi)$ от точки P до фигуры Φ* понимается такое число d, что любой шар с центром P и радиусом, меньшим d, не имеет с Φ общих точек, а любой шар с центром P и радиусом, большим d, имеет.

Впрочем, δ-окрестность фигуры можно определить и без понятия расстояния до Φ. Оказывается, данное определение эквивалентно следующему: δ-окрестность фигуры Φ — это множество Φ_δ таких точек P пространства, что всякий шар с центром P и радиусом, большим δ, имеет с Φ общие точки. Продумайте это.

Если в определении расстояния от точки до фигуры заменить слова «пространство» и «шар» на «плоскость» и «круг», то получится определение δ-окрестности фигуры на плоскости. Везде, где не оговорено противное, мы будем рассматривать пространственные окрестности.

Упражнения

1. а) Найти плоскую и пространственную δ-окрестности отрезка. Доказать, что площадь первой и объем второй равны, соответственно, $2\delta d+\pi\delta^2$ и $\pi\delta^2 d+\frac{4}{3}\pi\delta^3$, где d — длина отрезка.

б) Решить ту же задачу для окружности радиуса $R>\delta$ (в этом случае ответы такие: $4\pi\delta R$ и $2\pi^2R\delta^2$).

2. Найти в пространстве δ-окрестность правильного шестиугольника. Доказать, что $V(\delta)/2\delta$, где $V(\delta)$ — ее объем, при $\delta\to0$ стремится к площади шестиугольника.

Дадим теперь основное для этой заметки определение: *площадью поверхности Π* называется предел

$$S(\Pi)=\lim_{\delta\to0}\frac{V(\Pi_\delta)}{2\delta}, \qquad (1)$$

*) О применении этого понятия к решению задач можно почитать в статье «Окрестность фигуры» («Квант», 1973, № 10).

*) Так как мы будем рассматривать только замкнутые окрестности, прилагательное «замкнутый» в дальнейшем опускается.

где $V(\Pi_\delta)$ — объем ее δ-окрестности.

Предостережение. Разумеется, предел (1) может и не существовать. Можно показать, что для всех «хороших» поверхностей он существует (в простейших случаях он будет нами вычислен). Однако не следует думать, что из его существования для некоторой фигуры Π вытекает, что Π является поверхностью в общепринятом смысле. Кроме того, для площади по Минковскому не всегда справедливо равенство $S(\Pi_1 \cup \Pi_2) = S(\Pi_1) + S(\Pi_2)$ (при $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$); соответствующий пример рассматривается в задаче 4. Впрочем, с «хорошими» поверхностями таких неприятностей не случается.

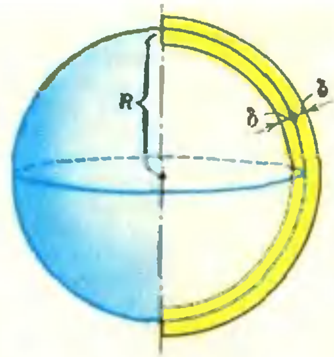


Рис. 1.

Примеры вычисления площадей

Вычислять площади поверхностей, непосредственно пользуясь данным выше определением, удается, конечно, только в простейших случаях *).

Мы найдем площади сферы, тора (поверхности, получаемой при вращении окружности вокруг непересекающей ее прямой), боковых поверхностей цилиндра и конуса. Половинки осевых сечений δ-окрестностей этих поверхностей изображены на рисунках 1, 2, 3а, 4а.

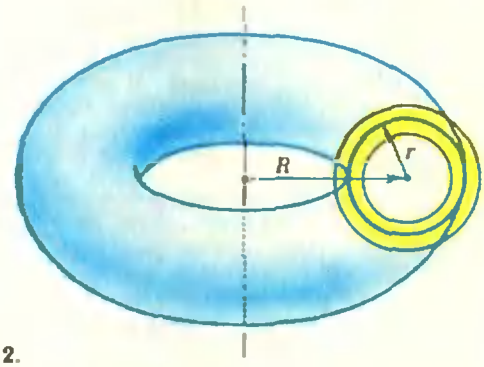


Рис. 2.

Упражнения

3. Доказать, что δ-окрестность поверхности, получаемой при вращении плоской кривой L вокруг оси l, лежащей в одной плоскости с кривой, есть результат вращения плоской δ-окрестности этой кривой вокруг оси l.

4. Доказать, что тела, возникающие при вращении фигур желтого цвета, изображенных на рисунках 1, 2, 3а, 4а, являются δ-окрестностями соответствующих поверхностей.

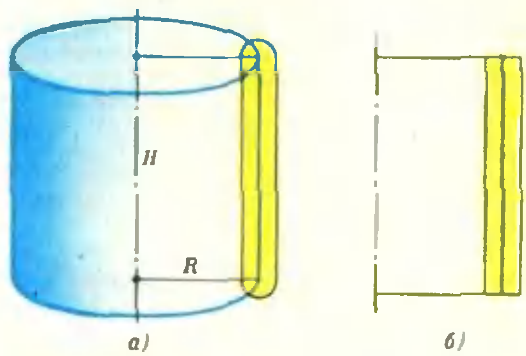


Рис. 3.

1. Сфера. Очевидно, что объем δ-окрестности сферы $\Sigma = \Sigma(R)$ радиуса R равен разности объемов шаров радиусов $R+\delta$ и $R-\delta$ (рис. 1):

$$V(\Sigma_\delta) = \frac{4}{3}\pi\left[(R+\delta)^3 - (R-\delta)^3\right] = 2\delta \cdot \frac{4}{3}\pi(3R^2 + \delta^2).$$

Деля последнее выражение на 2δ и переходя к пределу при $\delta \to 0$, находим, что $S(\Sigma(R)) = 4\pi R^2$.

2. Тор. Рассмотрим тор $T = T(R, r)$, получающийся при вращении окружности радиуса r вокруг оси, отстоящей от ее центра на рас-

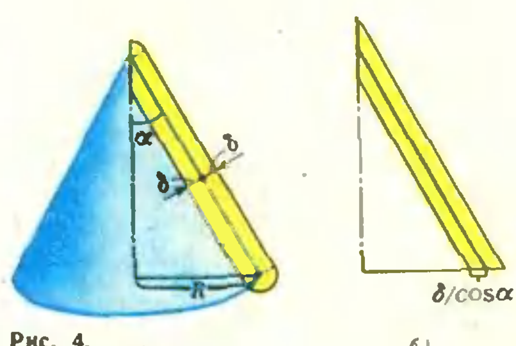


Рис. 4.

*) В более сложных случаях площадь поверхности находится с помощью тех или иных интегральных формул.

стоянии $R>r$ (рис. 2). Ясно, что *ограниченное* им тело есть r-окрестность окружности радиуса R, объем которой, согласно результату упражнения 1б), равен $2\pi^2Rr^2$. Пользуясь этой формулой, легко найти объем *δ-окрестности* тора (см. рис. 2) — он равняется разности объемов $(r+\delta)$-окрестности и $(r-\delta)$-окрестности окружности радиуса R:

$$V(T_\delta)=2\pi^2R(r+\delta)^2-$$
$$-2\pi^2R(r-\delta)^2=2\delta\cdot 4\pi^2Rr.$$

Следовательно, $S(T(R,r))=4\pi^2Rr$.

Из рисунков 3а и 4а видно, что найти объемы δ-окрестностей боковых поверхностей цилиндра и особенно конуса не так просто, как для сферы и тора. Вычисления существенно упростятся, если *чуть-чуть «подправить»* эти окрестности (рис. 3б и 4б). Мы проведем подсчет, воспользовавшись «поправками», а затем докажем их правомерность.

3. Ц и л и н д р. *Обозначим через* $C=C(R,H)$ боковую поверхность цилиндра радиуса R и высоты H. Объем ее «исправленной» δ-окрестности C'_δ (рис. 3б) равен разности объемов цилиндров радиусов $R+\delta$ и $R-\delta$ с одинаковой высотой H:

$$V\left(C'_\delta\right)=\pi H\left[(R+\delta)^2-(R-\delta)^2\right]=$$
$$=2\delta\cdot 2\pi RH, \qquad (2)$$

поэтому

$$S(C(R,H))=\lim_{\delta\to 0}\frac{V\left(C'_\delta\right)}{2\delta}=2\pi RH.$$

4. К о н у с. *Пусть* R — радиус основания конуса, α — угол между его осью и образующей, а $K=K(R,\alpha)$ — его боковая поверхность. Тогда объем тела K'_δ (рис. 4б) равен разности объемов конусов с радиусами $R+\frac{\delta}{\cos\alpha}$ и $R-\frac{\delta}{\cos\alpha}$ и одинаковыми углами α. Легко видеть, что

$$V\left(K'_\delta\right)=\frac{1}{3}\pi\operatorname{ctg}\alpha\left(R+\frac{\delta}{\cos\alpha}\right)^3-$$
$$-\frac{1}{3}\pi\operatorname{ctg}\alpha\left(R-\frac{\delta}{\cos\alpha}\right)=$$
$$=2\delta\frac{\pi}{\sin\alpha}\left(R^2+\frac{\delta^2}{3\cos^2\alpha}\right).$$

Следовательно, $S(K(R,\alpha))=\frac{\pi R^2}{\sin\alpha}$.

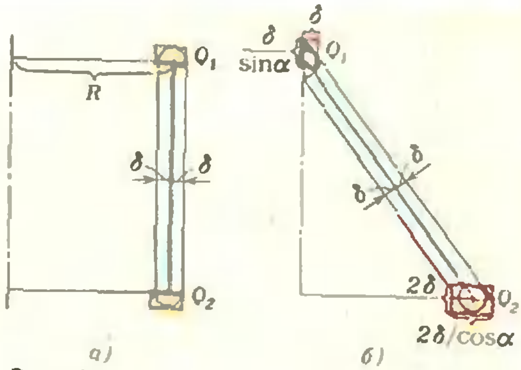


Рис. 5.

Если вместо угла α задана длина l образующей конуса, то, поскольку $l=\frac{R}{\sin\alpha}$, для площади получаем формулу $S(K)=\pi Rl$.

Докажем теперь законность замены окрестностей C_δ и K_δ на C'_δ и K'_δ. Ясно, что *замена окрестности* Π_δ в формуле (1) на какое-то тело Π'_δ не влияет на результат в том *и* только том случае, когда величина

$$v_{(\delta)}=\frac{V\left(\Pi_\delta\right)-V\left(\Pi'_\delta\right)}{2\delta}$$

стремится к нулю при $\delta\to 0$. Разности объемов $V\left(C_\delta\right)$ и $V\left(C'_\delta\right)$, $V\left(K_\delta\right)$ и $V\left(K'_\delta\right)$ по модулю не превосходят, очевидно, объемов тел, *получаемых* при вращении прямоугольников Q_1 и Q_2 на рисунках 5а и 5б соответственно. Найдя эти объемы (заметим, что *для этого* можно воспользоваться формулой (2)), мы получим, что в случае цилиндра $|v(\delta)|\leqslant 4\pi R\delta$, а в случае конуса $|v(\delta)|\leqslant\left(\frac{4\pi R}{\cos\alpha}+\frac{\pi\delta}{\sin\alpha}\right)\delta$. Следовательно, в обоих случаях $\lim\limits_{\delta\to 0}v(\delta)=0$.

Обобщения

Пусть для какого-то множества Φ существует *конечный* и *положительный* предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{V(\Phi_\delta)}{2\delta}$; тогда, очевидно, при замене знаменателя 2δ на $c\delta^n$ этот предел обратится в нуль при $n<1$ и в бесконечность при $n>1$. В определенном смысле это свойство *специфично* для п о в е р х н о с т е й. Легко понять, что для тел таким пограничным значением будет уже $n=0$, а для линий — $n=2$.

В частности, в *последнем* случае принимают следующее о п р е д е -

ление: *длиной линии* L по Минковскому (в пространстве) называется предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{V(L_\delta)}{\pi\delta^2}$. Интуитивным оправданием этого определения служит то, что сечение окрестности L_δ, перпендикулярное линии L, есть круг радиуса δ (площади $\pi\delta^2$), так что объем L_δ должен примерно равняться произведению $\pi\delta^2$ на длину линии L. Проверьте, пользуясь результатом упражнения 1, что определение Минковского дает для длин отрезка и окружности нужные значения.

Менее содержательно, но вполне осмысленно рассмотрение величин $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{V(\Phi_\delta)}{c\delta^n}$ при $n=0$ и $n=3$, где c — надлежащим образом выбранные постоянные (см. задачу 7).

Аналогичные определения можно дать и на плоскости, где наиболее интересен случай $n=1$: величину $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{S(L_\delta)}{2\delta}$, где $S(L_\delta)$ — площадь (плоской) δ-окрестности кривой L, естественно принять за длину линии L (ср. эпиграф).

Дальнейшие обобщения касаются n-мерных пространств при $n>3$ и на них мы, конечно, останавливаться не будем.

Задачи

1. Покажите, что не всегда δ-окрестность фигуры Φ является объединением всех шаров радиуса δ с центрами в точках этой фигуры.

2. Приведите пример двух различных фигур Φ и Φ' таких, что $\Phi_\delta=\Phi'_\delta$: а) при некотором δ; б) при всех δ.

3. Докажите, что объем δ-окрестности выпуклого n-угольника равен $2\delta\cdot S+\pi\delta^2\cdot P+\frac{4}{3}\pi\delta^3$, где S — его площадь, а P — полупериметр.

4. Пусть Q — квадрат, лежащий в плоскости Oxy, Q_1 — множество его точек, у которых обе координаты x и y рациональны, Q_2 — его остальные точки. Докажите, что все эти множества имеют площадь по Минковскому, причем $S(Q)=S(Q_1)=S(Q_2)$, так что $S(Q_1\cup Q_2)<S(Q_1)+S(Q_2)$, хотя множества Q_1 и Q_2 не пересекаются.

5. Найдите площадь поверхности, получаемой при вращении дуги окружности вокруг стягивающей ее хорды.

6. Найдите площадь поверхности тела, являющегося пересечением двух (достаточно длинных) цилиндров радиуса R, оси которых проходят через общую точку и взаимно перпендикулярны.

7. Подберите константы c_1 и c_2 так, чтобы пределы а) $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{V(\Phi_\delta)}{c_1}$ б) $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{V(\Phi_\delta)}{c_2\delta^3}$ имели содержательный геометрический смысл. Для каких фигур Φ они положительны?

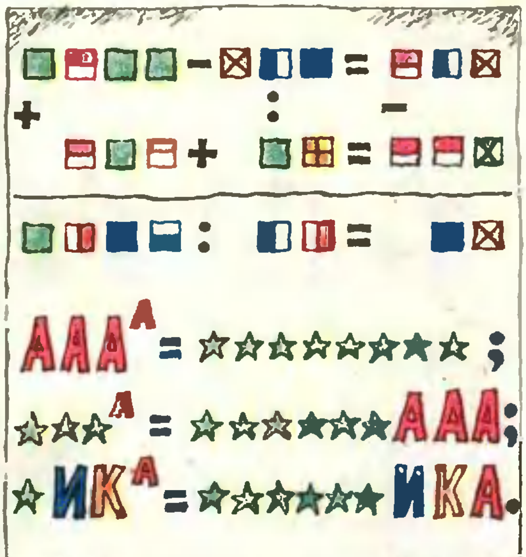
Список читателей, приславших правильные решения...

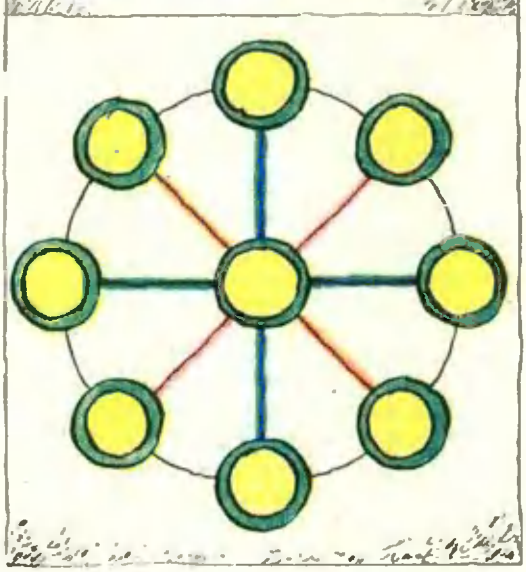
(Начало см. на с. 32)

В. Беркут (Днепропетровск) 18, 19; *А. Болдырев* (Алма-Ата) 19; *В. Болотников* (Харьков) 10, 12, 14—17, 19, 22; *Г. Борисов* (п. Комсомольский Тюменской обл.) 11, 12, 15, 17; *А. Бродин* (Киев) 11, 12; *О. Булыгин* (Павлодар) 18; *М. Валейко* (Киев) 9, 10; *О. Васильев* (п. Урмары ЧувАССР) 9; *С. Васильев* (Калинин) 10; *А. Велько* (п. Сахарный завод Минской обл.) 18; *Д. Володько* (Долгопрудный) 18, 19, 22; *Ф. Габбасов* (п/о Насибаш БашкАССР) 18; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) 9—14, 16, 19; *М. Гольцман* (Днепропетровск) 10, 11, 15, 20; *И. Гопич* (Новосибирск) 9, 10, 14, 15; *И. Грузберг* (Пермь) 9, 13; *Е. Давыдов* (п. Поплевино Рязанской обл.) 13; *И. Даниловский* (Горький) 19; *В. Джалоян* (с. Урцадзор АрмССР) 15; *В. Дидух* (Львов) 10; *А. Дремин* (п. Черноголовка Московской обл.) 11, 15, 18, 22; *М. Ермолаев* (Кострома) 16; *В. Жилич* (с. Хабары Алтайского кр.) 15, 18; *Ю. Жук* (Москва) 13, 15; *В. Жуков* (Абаза) 19, 20, 22; *К. Жуков* (Москва) 13, 15; *Д. Захаров* (Москва) 18; *А. Земсков* (Ухта) 18; *Е. Зудин* (Александров) 10, 11, 13—17, 22; *Е. Ивченко* (Винница) 18; *К. Ильин* (Вильнюс) 18; *С. Калашников* (Рязань) 10; *А. Каплан* (Сумгаит) 18; *В. Кельман* (Москва) 19; *О. Кириленко* (Балашиха) 22; *А. Клочков* (Челябинск) 13; *В. Ковтуненко* (Киев) 9, 10; *Е. Коган* (Днепропетровск) 10, 15, 16; *М. Коков* (с. Батех КБАССР) 9; *В. Комов* (Александров) 10, 11, 13, 14, 16—19, 22; *А. Коробейников* (Балашов) 10; *А. Костеров* (Семилуки) 20; *О. Кравец* (Воронеж) 19; *Р. Криштул* (Бобруйск) 16; *Е. Кузьмин* (Череповец) 9, 18, 19; *А. Куприн* (Москва) 9—12, 18—20, 22; *В. Курьян* (Ростов-на-Дону) 11—13, 15, 17, 19, 20; *В. Лашкин* (Киев) 12, 15, 18, 22; *А. Леонович* (Лида) 16; *В. Линьков* (Калуга) 10; *Д. Людмирский* (Киев) 10, 17—19, 22; *Ю. Макаров* (п/о Чагода Вологодской обл.) 18; *С. Маламанов* (Ленинград) 15, 18; *И. Маничев* (Слуцк) 18; *А. Матюкас* (Каунас) 15, 16, 19; *Л. Марухленко* (п. Старая Купавна Московской обл.) 12; *С. Медведев* (Москва) 10, 11; *В. Микулов* (Павлодар) 20; *А. Могильнер* (Свердловск) 20; *А. Молотовщиков* (Тейково) 16; *С. Муратчаев* (Махачкала) 10;

(Окончание см. на с. 51)

Квант для младших школьников





Задачи

1. Числовые ребусы. В первом ребусе цифры зашифрованы фигурками, в остальных—буквами и звездочками (см. рисунок). Одинаковым фигуркам и буквам соответствуют одинаковые цифры, разным—разные; звездочки могут быть любыми цифрами. Ни одно число не начинается нулем. Расшифруйте ребусы.

2. Решите уравнения:

а) $\overline{xyzz}=(\overline{xy})^2+(\overline{zz})^2$,

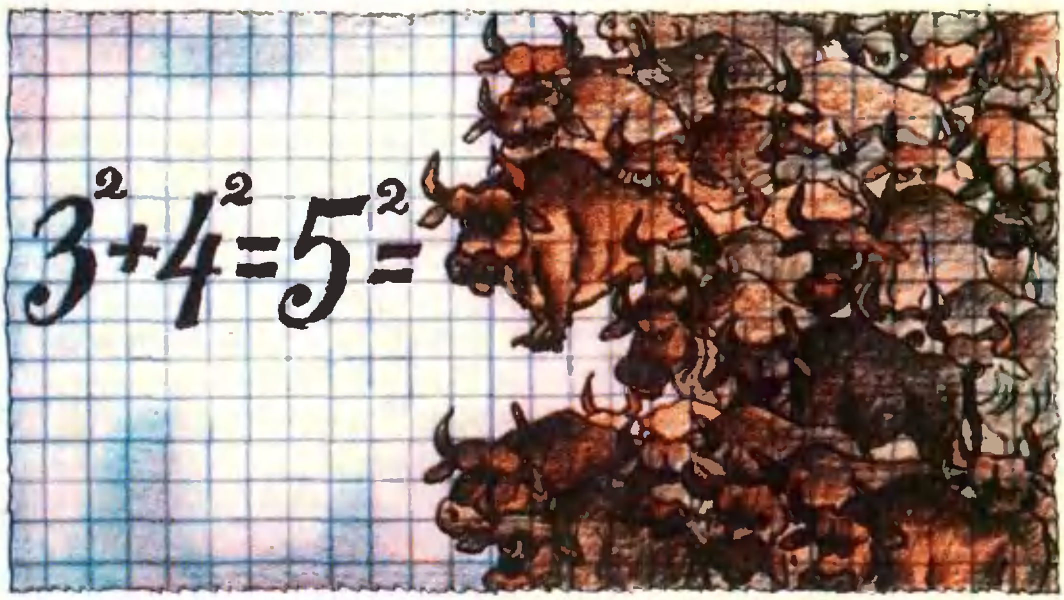
б) $\overline{xxyy}=(\overline{xx})^2+(\overline{yy})^2$

(запись $\overline{ab}$ означает двухзначное число, у которого b единиц и a десятков; запись $\overline{cdab}$ — четырехзначное число, у которого b единиц, a десятков, d сотен и c тысяч).

3. Числовое колесо. В кружочки изображенного на рисунке числового колеса поставьте первые девять нечетных простых чисел так, чтобы сумма любых трех чисел, расположенных по диаметру, была простым числом. Докажите, что при этом в центре может стоять любое из этих простых чисел, кроме числа 3.

4. Параллелограмм составлен из трех равнобедренных треугольников, среди которых нет конгруэнтных. Найдите величины его углов.

5. Двое мальчиков играют в такую игру: они по очереди ставят ладьи на шахматную доску. Выигрывает тот, при ходе которого все клетки доски оказываются побитыми поставленными фигурами. Кто выигрывает в этой игре, если оба стараются играть наилучшим образом?



С. Гиндикин

Арифметика на клетчатой бумаге

Почему тетрадь по математике — в клетку? Такой вопрос задают иногда первоклассники, которым не очень удобно писать цифры в клеточках. Позже они узнают, что на клетчатой бумаге удобно делать геометрические чертежи. Оказывается, рисуя различные фигуры на клетчатой бумаге, можно много интересного узнать и про арифметику.

Способ представления чисел фигурами на клетчатой бумаге уходит корнями в глубокую древность — к математике Древнего Вавилона, Египта, Греции. Конечно, тогда математики не разлиновывали глиняные таблички или папирусы на клетки, а составляли фигуры из точек. Мы же воспользуемся клетчатой бумагой.

В Древней Греции число, равное произведению двух натуральных сомножителей, называли *плоским числом*: оно связывалось с точками, расположенными в виде прямоугольной решетки (рис. 1). Мы же договоримся изображать плоское число прямоугольником на клетчатой бумаге и считать число клеточек в нем.

Свойства умножения хорошо иллюстрируются чертежами. Например, *распределительному закону* (правилу раскрытия скобок) соответствует разрезание прямоугольника на меньшие прямоугольники (рис. 2). Название «плоское число» теперь забыто, а слово «квадрат», обозначающее произведение равных сомножителей, сохранилось по сей день.

Квадраты и гномоны

Нечетные числа изображались в Древней Греции при помощи уголков тол-

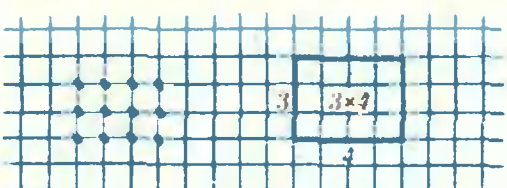


Рис. 1.

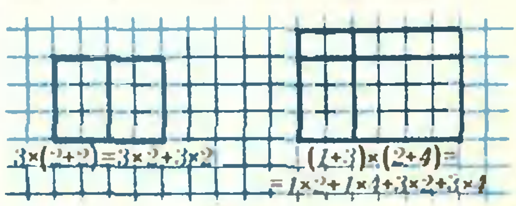


Рис. 2.

Рис. 3.

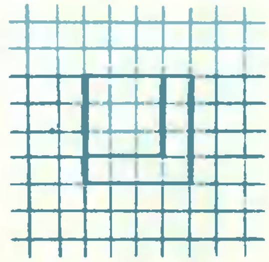


Рис. 5.

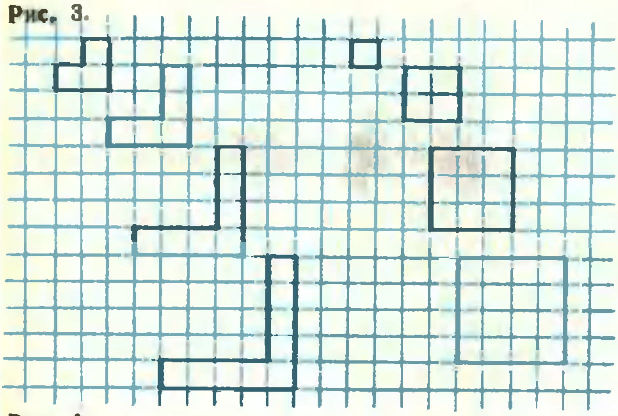


Рис. 4.

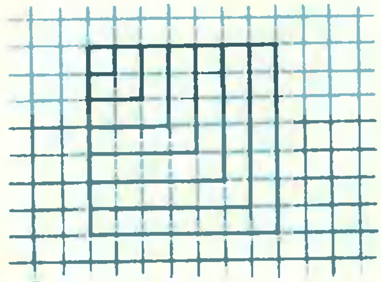


Рис. 6.

щиной в одну клетку — *гномонов* (рис. 3). Первое рассуждение, которое мы приведем, относится к квадратам и гномонам; принадлежит оно Никомаху Геразскому, жившему примерно в I веке.

Нарисуем подряд несколько квадратов и гномонов (рис. 4). Не правда ли, каждый гномон хочется дополнить некоторым квадратом; при этом получится с л е д у ю щ и й квадрат (рис. 5). Это наблюдение означает, что *каждое нечетное число является разностью двух последовательных квадратов.*

Теперь сложим подряд несколько гномонов, начиная с самого маленького. Получится квадрат (рис. 6). Значит, *сумма последовательных нечетных чисел, начиная с первого, является квадратом:* $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$ и т. д.

Пифагор и пифагорейцы

Полулегендарный мудрец Пифагор (VI в. до н. э.), любил путешествовать, и многое в его учении почерпнуто из восточной мудрости.

Для пифагорейцев характерно мистическое отношение к числам. Они коллекционировали всевозможные числовые «диковины», видя в них проявление божественных сил. При помощи числовых образов пифагорейцы умели выражать свои мысли и чувства. Четные числа назывались *женскими*, нечетные — *мужскими*. Особенно ценили пифагорейцы число $10=1+2+3+4$ (рис. 7), называя его *превосходным* или *тетрадой*, и клялись «тем, кто вложил в нашу душу тетраду — источник и корень вечной природы». Числа, равные сумме своих (с о б с т в е н н ы х) делителей ($6=1+2+3$), назывались *совершенными*, и Никомах знал четыре совершенных числа: 6, 28, 496, 8128. Дружбу символизировали пары *дружественных чисел*, каждое из которых является суммой (собственных) делителей другого числа. Например, числа 284 и 220 — дружественные: $284=1+2+4+5+10+20+11+22+44+55+110$, $220=1+2+4+71+142$. Но раз есть «хорошие» числа, то должны быть и «плохие». «Плохо», если число не обладает никакими достоинствами, еще хуже, если оно окружено интересными числами. Боязнь числа 13 — «чертовой дюжины» — поражает своей бессмертностью. Но кое-что забыто. Вот что пишет Плутарх: «Пифагорейцы питают отвращение к числу 17. Ибо 17 лежит как раз посередине между числом 16, представляющим полный квадрат, и числом 18, являющимся удвоенным квадратом; оба эти числа являются единственными плоскими числами, для которых периметр (прямоугольника) равен его площади...». Другими словами, ут-

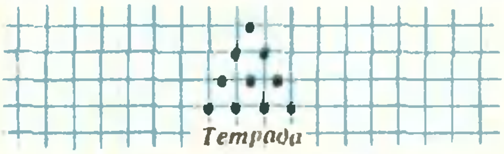


Рис. 7.

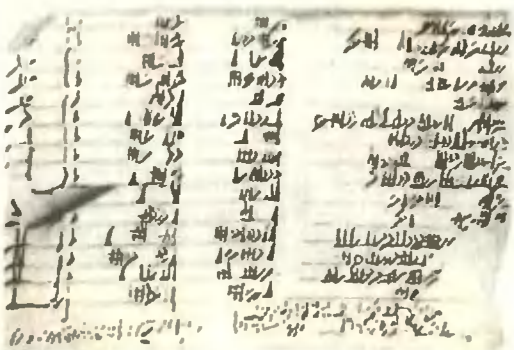


Рис. 8. Древневавилонский клинописный текст.

верждается, что если произведение двух чисел (разумеется, натуральных) равно их удвоенной сумме, то это *либо пара* 3 и 6, либо пара 4 и 4 (почему?).

Пифагоровы тройки

Существует легенда, согласно которой Пифагор в честь какого-то из своих открытий принес в жертву не то одного быка, не то сто быков. Витрувий утверждает, что столь важным Пифагору показалось открытие двух квадратов, сумма которых равна третьему квадрату *). Речь идет о соотношении $3^2+4^2=5^2$. Теперь тройки натуральных чисел a, b, c, для которых $a^2+b^2=c^2$, принято называть *пифагоровыми* тройками. Оказывается, пифагоровы тройки знали уже в Вавилоне (рис. 8). Постепенно нашли их и греческие математики.

Попытаемся понять, как можно найти пифагоровы тройки. Вспомним, что всякое нечетное число представляется в виде разности двух последовательных квадратов. Тогда нечетный квадрат вместе с квадратами, разностью которых он является, образуют пифагорову тройку. Например, $3^2=9=2\cdot4+1=5^2-4^2$ (рис. 9). Так получается тройка 3, 4, 5. Аналогично $5^2=25=2\cdot12+1=13^2-12^2$, откуда $12^2+5^2=13^2$; $7^2=49=2\cdot24+1=25^2-24^2$, откуда $24^2+7^2=25^2$. Таким образом получаются в с е пифагоровы тройки a, b, c, у которых $c=a+1$. Их общий вид:

$$a=\frac{m^2-1}{2},\quad b=m,\quad c=\frac{m^2+1}{2}$$

(m — нечетно!). Докажите это. А как *найти* все пифагоровы тройки?

*) Впрочем, другие источники указывают другие причины. Есть также мнение, что никакого жертвоприношения вообще не было, поскольку жертвоприношения противоречили философии пифагорейцев.

Общая задача о пифагоровых тройках

Накопленный опыт подсказывает, что надо исследовать разность двух л ю б ы х (а не только соседних) квадратов c^2-a^2, где $c>a$. Получается «толстый гномон» толщиной в $c-a$ клеток (рис. 10). Задача, таким образом, сводится к описанию всех возможных способов преобразования (без изменения числа клеток!) квадрата b^2 в некоторый «толстый гномон».

Первое наблюдение состоит в том, что «толстый гномон» можно преобразовать в прямоугольник (плоское число!) со сторонами длины $m=c-a$ и $n=c+a$ (рис. 11; мы получили геометрическое доказательство формулы $c^2-a^2=(c-a)(c+a)$). Возникает вопрос, какие плоские числа могут быть преобразованы в «толстые гномоны». Ясно, что числа $m=c-a$ и $n=c+a$ не равны друг другу и являются либо одновременно четными, либо одновременно нечетными — других же ограничений нет. Итак, если имеется прямоугольник, не являющийся квадратом, длины сторон которого m и n имеют одинаковую четность, то его можно преобразовать в «толстый гномон», являющийся разностью квадратов

$$c^2=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \text{ и } a^2=\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$$

(при наших предположениях числа $m+n$ и $m-n$ четны и отличны от нуля).

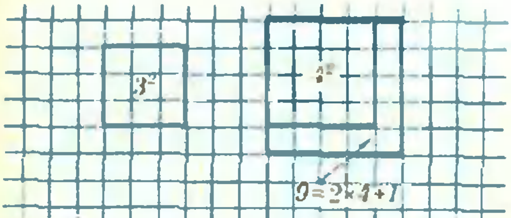


Рис. 9.

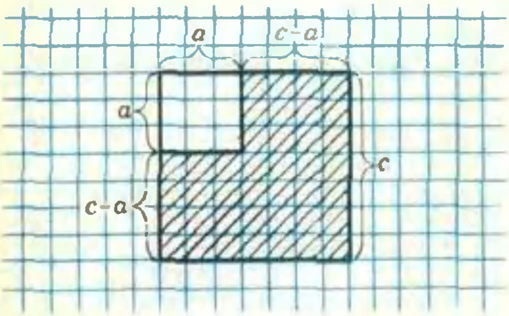


Рис. 10.

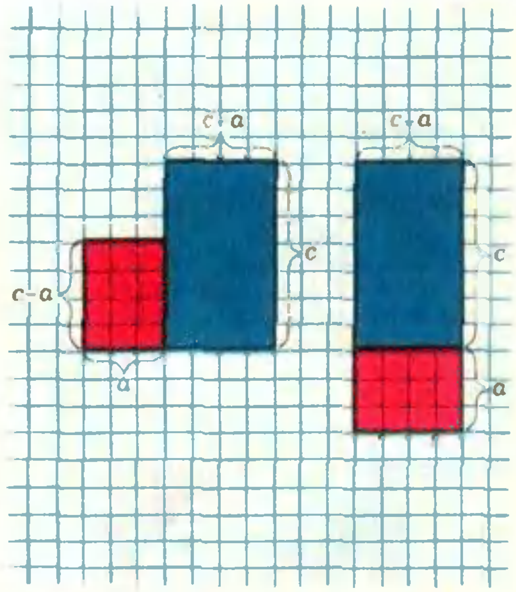


Рис. 11.

Итак, мы свели задачу о нахождении пифагоровых троек к вопросу о том, *каким образом квадрат* b^2 *может быть преобразован в прямоугольник со сторонами длины* m, n одинаковой четности ($m \neq n$). Эта задача легко решается. Пусть $r \neq b$ — делитель числа b^2 (но не обязательно — делитель числа b), для которого $\frac{b^2}{r}$ имеет ту же четность, что и r. При этом r должно быть той же четности, что и b, хотя это условие и недостаточно (почему?). Тогда прямоугольник со сторонами длины $m=r$ и $n=\frac{b^2}{r}$ может быть *преобразован в «толстый гномон»*, являющийся разностью квадратов

$$c^2=\left[\frac{b^2/r+r}{2}\right]^2 \text{ и } a^2=\left[\frac{b^2/r-r}{2}\right]^2.$$

Отметим, что r может равняться 1 и что можно ограничиться делителями $r<b$ (почему?).

Итак, все пифагоровы тройки имеют вид

$$a=\frac{b^2-r^2}{2r},\ b,\ c=\frac{b^2+r^2}{2r},$$

где $1 \leqslant r < b$ — такой делитель числа b^2, что r и b^2/r имеют одинаковую четность (совпадающую с четностью b). Пользуясь этим правилом, можно выписывать пифагоровы тройки автоматически. *Попробуйте проделать* это; для контроля мы приводим таблицу пифагоровых троек с b из первого десятка:

b	r	a	c
3	1	4	5
4	2	3	5
5	1	12	13
6	2	8	10
7	1	24	25
8	2	15	17
8	4	6	10
9	1	40	41
9	3	12	15
10	2	24	26

В таблице встречаются тройки a, b, c, отличающиеся только перестановкой чисел a *и* b; *это объясняется* тем, что в пифагоровой тройке a и b можно переставлять. Кроме того, мы видим, что не существует пифагоровой тройки с $b=2$: в этом случае нет подходящего делителя r

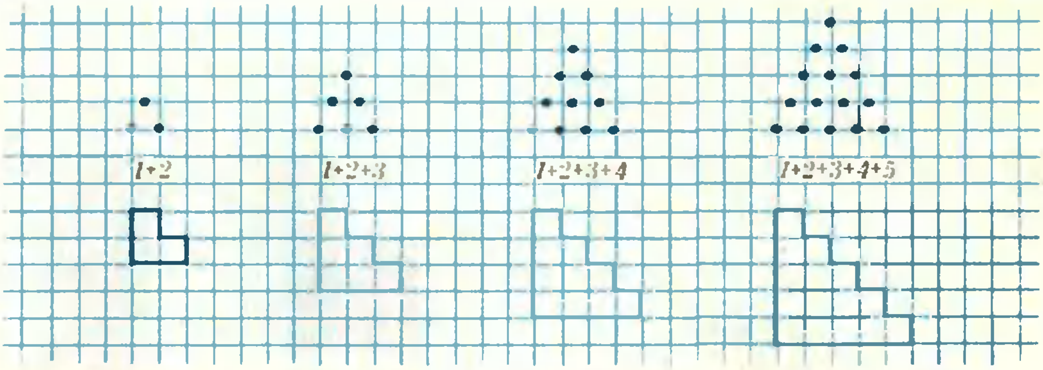


Рис. 12.

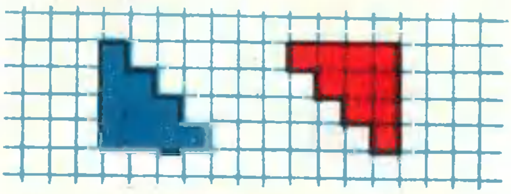


Рис. 13.

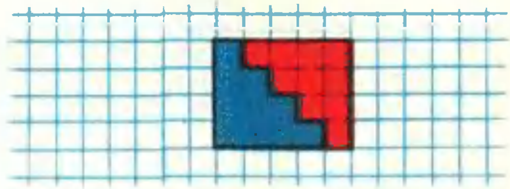


Рис. 14.

(условию $r<2$ удовлетворяет лишь натуральное $r=1$, но единица — нечетное число). Для всех же остальных b хотя бы одна пифагорова тройка существует. Если b нечетно, то можно взять $r=1$; при этом получаются a и c, отличающиеся на единицу (мы рассмотрели этот случай в самом начале). Если же $b\neq 2$ — четное, то можно взять $r=2$; при этом получатся тройки с $c-a=2$ (почему?).

Треугольные числа

В клинописных табличках вавилонян содержится способ вычислять сумму первых n натуральных чисел: $1+2+$ $+3+\ldots+n$. Такие суммы стали называть *треугольными числами*, поскольку из точек, соответствующих слагаемым, можно составить треугольник (рис. 12). На клетчатой бумаге удобнее нарисовать фигуру, напоминающую лестницу (рис. 13): в каждом следующем ряду лестницы на одну клетку больше, чем в предыдущем. Чтобы сосчитать число клеток в лестнице (равное искомой сумме), нарисуем еще одну такую же лестницу, но перевернутую; после чего «сдвинем» обе лестницы (рис. 14). Зубцы лестниц соединятся и получится прямоугольник, у которого длина одной стороны равна n, а другой $n+1$. В таком прямоугольнике $n(n+1)$ клеток; в лестнице же — вдвое меньше, т. е. $\frac{n(n+1)}{2}$.

Таким образом,

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Задача 1. *Пользуясь лестницами, найдите сумму $1+3+5+\ldots$ $\ldots+(2k+1)$ нечетных чисел; сумму $2+4+6+\ldots+2k$ четных чисел, сумму $1+4+7+\ldots+3k+1$ чисел вида $3k+1$* (первую из этих сумм мы уже нашли при помощи гномонов).

Следующая задача связана с еще одним интересным наблюдением Никомаха:

Задача 2. *Убедитесь в том, что гномон, являющийся разностью квадратов соседних треугольных чисел, является кубом, точнее*

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2=n^3.$$

Из этого соотношения Никомах получил формулу для суммы кубов

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Для ее доказательства достаточно собрать все гномоны, отвечающие соседним треугольным числам.

В. Можаев

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

Действие электрического и магнитного полей на заряженные частицы приводит ко многим интересным явлениям и широко используется в современной технике. Это, например, управление движением электронов в различных электровакуумных приборах и ускорение заряженных частиц до высоких энергий, фокусировка частиц с помощью электростатических и магнитных линз и разделение частиц по их удельным зарядам в масс-спектрографах.

Ограничимся рассмотрением наиболее простых случаев — движением заряженных частиц в однородных и стационарных (не зависящих от времени) электрическом и магнитном полях.

В электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$ на частицу с зарядом q и массой m действует электрическая сила

$$\vec{F}_{эл} = q\vec{E},$$

которая сообщает частице ускорение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{эл}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}.$$

Это ускорение направлено по полю, если $q>0$, и против поля, если $q<0$. Следовательно, положительная частица начнет равноускоренно двигаться по полю, а отрицательная — против поля.

Пусть частица переместилась из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2. При этом ее кинетическая энергия изменилась на величину

$$\Delta W_к = -q(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Вот почему энергию заряженных частиц удобно измерять в электронвольтах (1эВ — это энергия, которую приобретает частица с зарядом, равным заряду электрона, при прохождении разности потенциалов в один вольт).

На движущуюся заряженную частицу в магнитном поле действует магнитная сила, называемая силой Лоренца $\vec{F}_л$. Ее модуль

$$|\vec{F}_л| = q|\vec{v}||\vec{B}|\sin\alpha,$$

где q — заряд частицы, $\vec{v}$ — ее скорость, $\vec{B}$ — индукция магнитного поля и α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Характерной особенностью этой силы является то, что она всегда перпендикулярна направлению движения частицы и индукции магнитного поля.

Поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости частицы, работа этой силы равна нулю. Следовательно, если на частицу не действуют никакие другие силы, при движении в магнитном поле энергия частицы будет оставаться постоянной величиной *).

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Отрицательно заряженная частица движется в однородном электрическом поле так, что эквипотенциальную поверхность с потенциалом φ_1 она пересекает под углом α_1 к нормали, а эквипотенциальную поверхность с потенциалом φ_2 — под углом α_2 (рис. 1). Известно, что в точке, где потенциал поля равен нулю, скорость частицы равна нулю. Найдите связь между углами α_1 и α_2.*

Если в точке с нулевым потенциалом кинетическая энергия частицы была равна нулю, в точках *1* и *2*

*) Подробнее об этом можно прочитать в статье Ю. Зайчикова «Сила Лоренца и ее работа» («Квант», 1979, № 2).

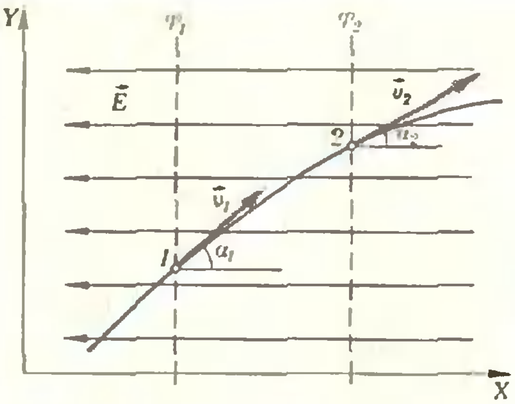


Рис. 1.

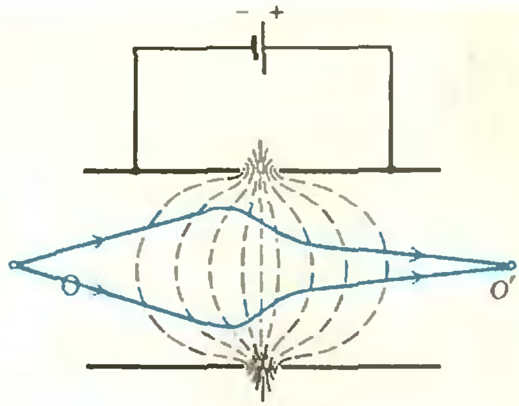


Рис. 2.

она будет равна соответственно

$$\frac{m\left|\vec{v}_1\right|^2}{2}=-q\varphi_1$$

и

$$\frac{m\left|\vec{v}_2\right|^2}{2}=-q\varphi_2,$$

откуда отношение скоростей частицы

$$\frac{\left|\vec{v}_1\right|}{\left|\vec{v}_2\right|}=\sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_2}}.$$

В направлении оси X на частицу действует электрическая сила, поэтому проекция скорости v_x будет возрастать: $v_{x_2}>v_{x_1}$. В направлении оси Y нет никаких действующих на частицу сил; следовательно, проекция скорости v_y будет оставаться постоянной:

$$\left|\vec{v}_1\right|\sin\alpha_1=\left|\vec{v}_2\right|\sin\alpha_2,$$

или

$$\frac{\left|\vec{v}_1\right|}{\left|\vec{v}_2\right|}=\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}.$$

Сравнивая два выражения для отношения модулей скоростей частицы в точках 1 и 2, найдем связь между синусами углов α_1 и α_2:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}.$$

Обратите внимание на такой факт: траектория частицы отклоняется в направлении нормали к эквипотенциальной поверхности, если (как в рассмотренном нами случае) частица движется в сторону возрастания потенциала. Это позволяет понять и более сложные движения зарядов в неоднородных электрических полях, например *принцип электростатической фокусировки*. На рисунке 2 показана так называемая *электростатическая линза*, составленная из двух коаксиальных цилиндров; пунктирными линиями изображены сечения эквипотенциальных поверхностей. Точка O — источник расходящегося пучка медленных электронов, а точка O' — изображение сходящегося пучка быстрых электронов.

Задача 2. *Электрон влетает в пространство между пластинами плоского конденсатора, между которыми поддерживается постоянная разность потенциалов $U=60$ В (рис. 3). Определите минимальную скорость электрона $\vec{v}_{\min}$, при которой он достигнет верхней пластины. Удельный заряд электрона $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг, угол падения $\alpha=60°$.*

При движении в конденсаторе на электрон будет действовать постоянная электрическая сила, направленная против поля, то есть от отрицательной пластины к положительной. Поэтому проекция скорости электрона на ось Y будет равномерно уменьшаться, а проекция на ось X — оставаться постоянной. Нетрудно показать, что траекторией движения электрона будет парабола (проверьте это самостоятельно).

Минимальная начальная скорость электрона будет соответствовать случаю, когда парабола касается верхней пластины конденсатора. Это означает, что в момент касания проекция v_y скорости электрона будет равна нулю.

В точке 1 кинетическая энергия электрона была $\frac{m\left|\vec{v}_{min}\right|^2}{2}$, а в точке 2 она равна $\frac{mv_x^2}{2}=\frac{m\left(\left|\vec{v}_{min}\right|\sin\alpha\right)^2}{2}$. С другой стороны, изменение кинетической энергии связано с разностью потенциалов между пластинами конденсатора: $\Delta W_к=-eU$ *). Таким образом,

$$\frac{m\left(\left|\vec{v}_{min}\right|\sin\alpha\right)^2}{2}-\frac{m\left|\vec{v}_{min}\right|^2}{2}=-eU,$$

откуда

$$\left|\vec{v}_{min}\right|=\sqrt{2\frac{e}{m}\frac{U}{1-\sin^2\alpha}}\approx$$
$$\approx 9{,}2\cdot10^6 \text{ м/с}.$$

Попробуйте решить эту задачу другим способом: запишите уравнения движения электрона по осям X и Y и из них найдите минимальную начальную скорость.

---

*) Под e здесь и в дальнейшем мы будем понимать модуль заряда электрона.

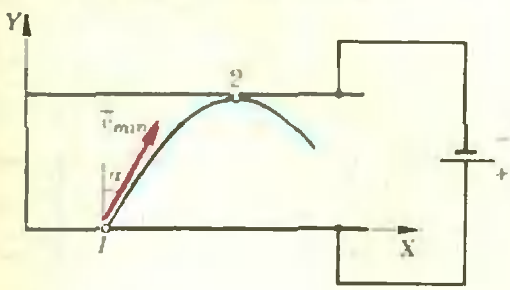


Рис. 3.

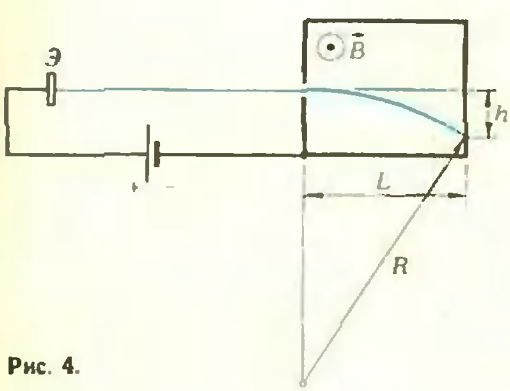


Рис. 4.

Задача 3. *Пучок однократно заряженных положительных ионов Li^+ ($A=6$) испускается эмиттером «Э». Ионы ускоряются электрическим полем и, пройдя разность потенциалов $U=3000$ В, попадают в камеру с поперечным магнитным полем $|\vec{B}|=3\cdot10^{-2}$ Т (рис. 4). Найдите величину отклонения пучка h. Длина камеры $L=15$ см, заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, масса протона $m_p=1{,}67\cdot10^{-24}$ г.*

Пройдя ускоряющую разность потенциалов U, каждый ион приобретает кинетическую энергию

$$\frac{m\left|\vec{v}\right|^2}{2}=eU,$$

где m — масса иона, $\vec{v}$ — его скорость. Отсюда

$$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

С такой скоростью ион влетит в камеру, где существует только магнитное поле. На ион начнет действовать сила Лоренца, которая сообщит ему центростремительное ускорение. Поскольку сила Лоренца в каждый момент перпендикулярна скорости иона, ион будет двигаться по окружности. Радиус этой окружности можно найти из уравнения движения иона

$$\frac{m\left|\vec{v}\right|^2}{R}=e\left|\vec{v}\right|\left|\vec{B}\right|.$$

С учетом того, что $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{\frac{2eU}{m}}$, получим

$$R=\frac{m\left|\vec{v}\right|}{e\left|\vec{B}\right|}=\frac{1}{\left|\vec{B}\right|}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Величина отклонения пучка h находится из простых геометрических расчетов (см. рис. 4):

$$h=R-\sqrt{R^2-L^2}\approx0{,}02 \text{ м}.$$

Задача 4. *Слаборасходящийся пучок электронов вылетает из точки O со скоростью $\vec{v}$ и движется в продольном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ (рис. 5). При каких значениях модуля вектора магнитной индукции будет происходить фокусировка пучка на экране «Э», расположенном на расстоянии L от точки O?*

Рассмотрим движение отдельного электрона, вектор скорости которого лежит в плоскости рисунка 5 и составляет угол α с вектором $\vec{B}$.

Поскольку на электрон действует только сила Лоренца, проекция которой на направление поля равна нулю, проекция скорости электрона на это направление будет оставаться постоянной и равной $|\vec{v}|\cos\alpha$.

В плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$, электрон будет двигаться по окружности с линейной скоростью, равной $|\vec{v}|\sin\alpha$. Запишем уравнение движения электрона по окружности:

$$\frac{m\left(|\vec{v}|\sin\alpha\right)^2}{R}=e|\vec{v}||\vec{B}|\sin\alpha.$$

Отсюда найдем радиус окружности R и период обращения T:

$$R=\frac{m|\vec{v}|\sin\alpha}{e|\vec{B}|},$$

$$T=\frac{2\pi R}{|\vec{v}|\sin\alpha}=\frac{2\pi m}{e|\vec{B}|}.$$

Одновременно электрон равномерно движется по полю со скоростью $|\vec{v}|\cos\alpha$.

Если через время $\tau=\frac{L}{|\vec{v}|\cos\alpha}$ электрон окажется в точке O' (см. рис. 5), это будет означать, что он сделал целое число n полных оборотов:

$$\tau=nT,$$

или

$$\frac{L}{|\vec{v}|\cos\alpha}=n\frac{2\pi m}{e|\vec{B}_n|},$$

где $n=1, 2, 3, \ldots$ В результате получаем дискретный набор значений модуля вектора магнитной индукции, при которых электрон будет попадать в точку O':

$$|\vec{B}_n|=\frac{2\pi m|\vec{v}|\cos\alpha}{eL}n.$$

Говоря строго, значения фокусирующих полей зависят от угла α. Однако при малых углах $\cos\alpha\approx1$ и

$$|\vec{B}_n|\approx\frac{2\pi m|\vec{v}|}{eL}n.$$

З а д а ч а 5. *Положительно заряженная частица влетает в скрещенные однородные электрическое и магнитное поля. Начальная скорость частицы $\vec{v}_0$ перпендикулярна и электрическому полю $\vec{E}$, и магнитному полю $\vec{B}$ (рис. 6). По какой траектории будет двигаться частица?*

Оказывается, при фиксированных значениях $\vec{E}$ и $\vec{B}$ вид траектории частицы целиком определяется величиной ее начальной скорости $\vec{v}_0$.

Если $|\vec{v}_0|=\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$, сила Лоренца будет равна по модулю, но противоположна по направлению электрической силе, поэтому частица будет двигаться равномерно и прямолинейно вдоль оси X.

Если $|\vec{v}_0|>\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$, модуль силы Лоренца в начальный момент будет больше модуля электрической силы; следовательно, на частицу будет действовать результирующая сила, направленная вниз. По мере смещения частицы вниз, против поля $\vec{E}$, она

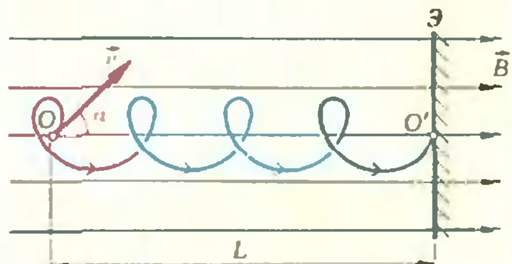


Рис. 5.

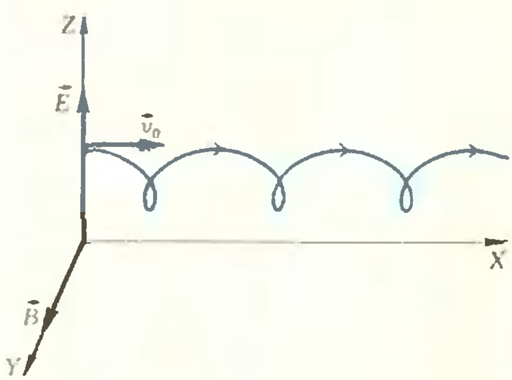


Рис. 6.

будет постепенно терять скорость и все сильнее и сильнее загибаться магнитным полем (см. рис. 6). В самой нижней точке траектории проекция скорости частицы v_z станет равной нулю, а ее полная скорость будет минимальной. Радиус кривизны траектории в этой точке будет наименьшим, а ускорение частицы, направленное вверх, — наибольшим.

Затем частица начнет двигаться вверх, по полю $\vec{E}$, ее скорость будет увеличиваться, а вместе с ней будет увеличиваться и радиус кривизны траектории. В некоторый момент скорость частицы станет равной начальной скорости $\vec{v}_0$.

В результате частица будет «дрейфовать» вдоль оси X. Траекторией ее движения является циклоида. На рисунке 6 показана траектория частицы для случая, когда $|\vec{v}_0| > 2\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$.

(Строгий расчет показывает, что движение по циклоиде можно представить как суперпозицию равномерного движения по оси X со скоростью $|\vec{v}| = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$ и движения по окружности в плоскости XZ.)

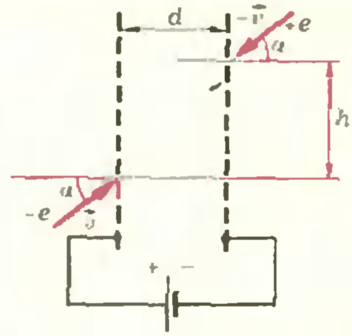


Рис. 7.

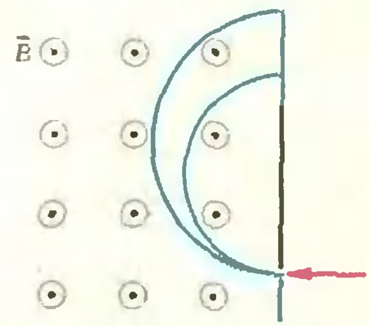


Рис. 8.

Упражнения

1. Две заряженные частицы с равными скоростями $|\vec{v}| = 10^9$ см/с одновременно влетают в плоский конденсатор (рис. 7). Определите, при какой напряженности $\vec{E}$ электрического поля в конденсаторе частицы смогут столкнуться. Удельные заряды частиц равны по абсолютной величине ($e/m = 1{,}76\cdot 10^{11}$ Кл/кг), но противоположны по знаку. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ см; $h = 5$ см; угол падения частиц $\alpha = 45°$.

2. В планетарной модели атома водорода (по Резерфорду — Бору) предполагалось, что электрон вращается по круговой орбите вокруг небольшого тяжелого положительно заряженного ядра (протона). Определите радиус атома водорода, если известно, что минимальная энергия, которую нужно дополнительно сообщить электрону для удаления его из атома (энергия ионизации), равна $W = 2{,}2\cdot 10^{-18}$ Дж. Заряды электрона и протона равны $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

3. В устройстве для определения изотопного состава (масс-спектрографе) однозарядные ионы калия с атомными весами $A_1 = 39$ и $A_2 = 41$ сначала ускоряются в электрическом поле, а затем попадают в однородное магнитное поле, перпендикулярное направлению их движения (рис. 8). В процессе опыта из-за несовершенства аппаратуры ускоряющий потенциал меняется около среднего значения U_0 на величину $\pm\Delta U$. С какой относительной точностью $\Delta U/U_0$ нужно поддерживать значение ускоряющего потенциала, чтобы пучки изотопов калия не перекрывались?

4. Селектор скоростей заряженных частиц представляет собой устройство со взаимно перпендикулярными электрическим и магнитным полями. При некоторых величинах полей через селектор прямолинейно проходят электроны с кинетической энергией T_e. Протоны какой энергии T_p пройдут прямолинейно через тот же селектор?

Н. Розов

Читатели советуют

В обширной редакционной почте «Кванта» значительная часть писем наших читателей — школьников, преподавателей, любителей математики — касается тематики раздела «Практикум абитуриента». Многие из них затрагивают частные вопросы — на такие письма редакция отвечает лично их авторам. Но в целом ряде писем и заметок высказываются интересные соображения по различным теоретическим вопросам школьного курса математики, излагаются приемы решения некоторых типов экзаменационных задач, сообщаются полезные замечания, предложения методического характера, самостоятельно составленные задачи. Хотя приводимые в подобных письмах соображения и задачи не всегда являются новыми и оригинальными, с их содержанием целесообразно, на наш взгляд, познакомить всех читателей «Кванта». Не считая возможным публиковать эти письма и заметки полностью, редакция подготовила подборку материалов, составленную по идеям и предложениям читателей журнала, с необходимыми дополнительными комментариями. Мы надеемся, что включенные в подборку вопросы окажут помощь поступающим в вузы.

Свободное владение школьным курсом математики, которое абитуриент должен показать на приемном экзамене, подразумевает, в частности, умение правильно проводить вычисления, грамотно преобразовывать алгебраические выражения. К сожалению, поступающим часто снижают оценку именно за ошибки, допущенные в ходе преобразований. Такие ошибки происходят, как правило, не из-за незнания — это, скорее, результат невнимательности и небрежности, неумения проверять самого себя, результат недостаточной практики в решении примеров, отрабатывающих технику преобразований.

При решении подобных примеров полезно иметь в виду следующее соображение: иногда преобразование алгебраических выражений удается упростить, если удачно использовать тригонометрические функции, т. е. сделать тригонометрическую подстановку (см. «Квант», 1974, № 3, с. 49—50). Суть этого метода состоит в том, что вместо одной из входящих в алгебраическое выражение переменных подставляется некоторая тригонометрическая функция вспомогательного угла, причем она подбирается так, чтобы исходное выражение в силу известных формул тригонометрии упростилось.

Конечно, удачная тригонометрическая подстановка бывает полезна не только для преобразования алгебраических выражений, но и во многих задачах — при решении уравнений, доказательстве неравенств и т. д. Большой набор интересных примеров такого рода прислал наш читатель *В. Ольхов* (Горький).

Пример 1. *Доказать тождество*

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \qquad (1)$$

Прежде всего заметим, что обе части равенства (1) одновременно имеют смысл, если

$$b\geqslant 0,\quad a\geqslant 0,\quad a\geqslant\sqrt{b}; \qquad (2)$$

для этих значений a и b мы и докажем наше тождество. Наличие под квадратным корнем выражения a^2-b наводит на мысль положить

$$b=a^2\sin^2\varphi,\ \text{где}\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2, \qquad (3)$$

— ведь тогда

$$\sqrt{a^2-b}=a\cos\varphi.$$

Такая тригонометрическая подстановка допустима, поскольку в силу неравенств (2) дробь b/a^2 (при $a\neq 0$) заключена между 0 и 1 и ее можно принять за значение квадрата синуса некоторого угла первой четверти (если $a=0$, то и $b=0$ и тождество (1) очевидно).

После подстановки (3) правая часть равенства (1) запишется в виде

$$\sqrt{a}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

В то же время

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{a+a\sin\varphi}=$$
$$=\sqrt{a}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

так как $1+\sin\varphi=\cos^2\frac{\varphi}{2}+$

$+2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}=\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\right.$

$\left.+\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$, и тождество (1) доказано.

Пример 2. *Доказать, что при $c>0$, $a>c$, $b>c$*

$$\sqrt{(a+c)(b+c)}+$$
$$+\sqrt{(a-c)(b-c)}\leqslant 2\sqrt{ab}.$$

Когда в этом неравенстве достигается знак равенства?

Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)}+$$
$$+\sqrt{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}\leqslant 2. \qquad (4)$$

Так как по условию

$$0<\frac{c}{a}<1, \quad 0<\frac{c}{b}<1,$$

можно положить

$$\frac{c}{a}=\cos\alpha, \quad 0<\alpha<\pi/2,$$

$$\frac{c}{b}=\cos\beta, \quad 0<\beta<\pi/2.$$

Если в левой части неравенства (4) выполнить эту тригонометрическую подстановку, то можем последовательно записать:

$$\sqrt{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}+$$
$$+\sqrt{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}=$$
$$=2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=$$
$$=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\leqslant 2,$$

что и доказывает неравенство (4).

Из приведенной цепочки преобразований видно, что равенство в соотношении (4) достигается, когда

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=1,$$

т. е. при $\alpha=\beta$; это возможно только при $a=b$ (проверьте самостоятельно!).

Следующее ниже иррациональное уравнение с параметром без особого труда решается стандартным методом — возведением в степень; надо только внимательно проследить за тем, чтобы не получить посторонних корней. Мы покажем, как это уравнение решается иначе — с помощью тригонометрической подстановки.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x}=x. \qquad (5)$$

Заметим прежде всего, что если уравнение (5) при каком-нибудь значении параметра p имеет корень, то этот корень — неотрицательное число (почему?). Отсюда следует, что при $p<0$ уравнение (5) корней не имеет, при $p=0$ оно имеет один корень $x=0$ и при $p>0$ корни должны удовлетворять неравенствам $0<x\leqslant p$ (докажите эти утверждения).

Сделаем тригонометрическую подстановку

$$x=p\cos\psi, \quad 0\leqslant\psi<\frac{\pi}{2};$$

тогда уравнение (5) примет вид

$$\sqrt{1+\cos\psi}+\sqrt{1-\cos\psi}=\sqrt{p}\cos\psi,$$

или

$$\sqrt{2}=\sqrt{p}\left(\cos\frac{\psi}{2}-\sin\frac{\psi}{2}\right)$$

(проделайте выкладки). Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, получим

$$\sin\psi=\frac{p-2}{p}.$$

Определяемое отсюда значение ψ можно выбрать в первой четверти только тогда, когда $p\geqslant 2$; следовательно, уравнение (5) имеет корни только для значений параметра $p\geqslant 2$. При любом значении параметра, удовлетворяющем этому условию,

$$\cos\psi=\sqrt{1-\sin^2\psi}=\frac{2}{p}\sqrt{p-1},$$

а потому при $p\geqslant 2$ уравнение (5) имеет корень

$$x=2\sqrt{p-1}.$$

Упражнения

1. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}.$$

2. Доказать, что при $a>|b|$

$$b\sqrt{2}\,\frac{2a+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}=$$
$$=\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}.$$

3. Доказать, что для неотрицательных чисел a, b, c, d

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\leqslant\sqrt{(a+d)(b+c)}.$$

4. Доказать, что если $a>c>0$ и $b>c>0$, то

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leqslant\sqrt{ab}.$$

Когда в этом неравенстве достигается знак равенства?

5. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-x}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-x}}{2}}=$$
$$=\sqrt{4+\sqrt{x}}+\sqrt{16-x}.$$

* * *

Ученик 10 класса *Валерий Голубенко* (г. Черкесск Ставропольского края) предлагает читателям журнала решить составленную им задачу:

6. Пусть D — точка пересечения высот $[AE]$ и $[BF]$ равнобедренного треугольника ABC, в котором $|AB|=|BC|$. Рассматривается отношение N площадей треугольников BED и ABC.

а) Доказать, что $N=1/90$, если точка D лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) Вычислить N в случае, когда точка D является центром тяжести треугольника, симметричного треугольнику ABC относительно середины высоты $[BF]$.

* * *

Судя по письмам, большой интерес у читателей журнала вызвали примеры систем уравнений, которые решаются не стандартными преобразованиями, а логическими рассуждениями («Квант», 1978, № 4, с. 50).

С. Мириев (пос. Хиллы Нефтечалинского р-на Азербайджанской ССР) прислал в редакцию задачу, решение которой остроумно использует неравенство Бернулли («Алгебра и начала анализа 9», п. 2).

Пример 4. *Решить в целых числах уравнение*

$$x=\lg(9x+1). \qquad (6)$$

Ясно, что уравнение (6) целых отрицательных корней не имеет, а $x=0$ — его корень. Поэтому будем искать целые положительные корни. Перепишем уравнение (6) в виде

$$(1+9)^x=1+9x.$$

Но в силу неравенства Бернулли при любом натуральном n

$$(1+9)^n\geqslant 1+9n,$$

причем знак равенства достигается только при $n=1$. Поэтому уравнение (6) имеет единственный целый положительный корень $x=1$.

Предлагаем читателям самостоятельно подумать еще над двумя «нестандартными» задачами — уравнением, которое прислал *А. Ермилов* (г. Коломна Московской области), и системой неравенств, составленной *М. Левиным* (Таллин):

7. Решить уравнение

$$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy.$$

8. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}\geqslant 2+x^2,\\ 2^{x+y-4}\leqslant\dfrac{1-(z-x)^2}{1+(4-y)^2}.\end{cases}$$

* * *

Говорят, что в геометрии обосновать сложное утверждение часто оказывается проще, чем строго доказать наглядно очевидный факт. Об одном таком факте и идет речь в задаче *С. Сефибекова* (село Кашкент Хивского р-на Дагестанской АССР):

9. Доказать, что если сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью представляет собой треугольник, то этот треугольник остроугольный.

* * *

В ряде случаев оказывается полезным представить выражение $a\sin x+b\cos x$ в следующем виде:

$$a\sin x+b\cos x=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi), \qquad (7)$$

где a и b — константы, а вспомогательный угол φ определяется соотношениями

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(«Квант», 1976, № 4, с. 41—42).

На любопытное обобщение формулы (7) указывает в своем письме *М. Шкапенюк* (Одесса). Продемонстрируем это обобщение на конкретной задаче.

Пример 5 (МГУ, мехмат, 1965). *Сколько корней имеет уравнение*

$$\sin x+2\sin 2x=3+\sin 3x?$$

Применяя известные формулы тригонометрии, предложенное уравнение перепишем в виде

$$\sin 2x-\sin x\cos 2x=\frac{3}{2}. \qquad (8)$$

Теперь левую часть преобразуем следующим образом:

$$\sin 2x-\sin x\cos 2x=$$
$$=\sqrt{1+\sin^2 x}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\sin 2x-\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\cos 2x\right].$$

Так как при любом x

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)^2+\left(-\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)^2=1,$$

существует зависящий от x угол $\varphi=\varphi(x)$ такой, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}=\cos\varphi(x),$$
$$-\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}=\sin\varphi(x).$$

Но тогда

$$\sin 2x-\sin x\cos 2x=$$
$$=\sqrt{1+\sin^2 x}\sin(2x+\varphi(x)),$$

так что уравнение (8) равносильно уравнению

$$\sqrt{1+\sin^2 x}\sin(2x+\varphi(x))=\frac{3}{2}.$$

Поскольку левая часть последнего уравнения при всех значениях x не превосходит $\sqrt{2}$, это уравнение корней не имеет.

* * *

Наш читатель *В. Колмыков* (Воронеж) предлагает найти ошибку в «доказательстве» следующей явно неверной «теоремы»:

10. Теорема. *Если две плоскости параллельны, то они совпадают.*

Доказательство. Пусть

$$ax+by+cz+d=0 \qquad (9)$$

— уравнение плоскости α, а

$$Ax+By+Cz+D=0$$

— уравнение плоскости β, и пусть $\alpha\parallel\beta$. В силу параллельности этих плоскостей

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c},$$

или, если обозначить эти отношения через k,

$$A=ka,\quad B=kb,\quad C=kc.$$

Но тогда уравнение плоскости β можно записать в виде

$$ax+by+cz+\frac{D}{k}=0. \qquad (10)$$

Вычитая из равенства (10) равенство (9), получаем, что $D=kd$, а потому уравнение (10) плоскости β можно переписать в виде

$$ax+by+cz+d=0.$$

Поскольку это уравнение совпадает с уравнением (9) плоскости α, получаем $\alpha=\beta$.

Список читателей, приславших правильные решения...

(Начало см. на с. 32, 36)

И. Овчинников (Ленинград) 9—11; *И. Омелян* (Львов) 9—12, 15, 18, 19; *А. Опарин* (Горький) 19, 22; *В. Остапенко* (Алма-Ата) 9, 10; *Т. Павелкина* (Киев) 10, 11; *А. Павенис* (п/о Нагале ЛатвССР) 13; *А. Павлов* (Узловая) 16; *А. Паланджян* (Ереван) 16; *Г. Паплаускас* (Гарлява) 16; *А. Перов* (Москва) 15; *А. Петров* (Красногорск Московской обл.) 18, 19; *С. Прядкин* (Киев) 9—11, 15—17; *С. Пузанов* (Одинцово) 10; *И. Романовский* (Лида) 10, 16, 20; *И. Рузин* (Ленинград) 22; *И. Савенков* (р/п Лысые Горы Саратовской обл.) 11, 18; *С. Сафронюк* (Ровно) 18, 19, 22; *В. Сачков* (Чебоксары) 11, 19; *Л. Семенова* (Днепропетровск) 10; *В. Середа* (Львов) 12; *П. Сильвестров* (Новосибирск) 15—17, 19, 20; *Е. Ситников* (Туймазы) 9; *О. Скрипачев* (Казань) 9, 10, 12; *Ю. Солдатенко* (Пинск) 10, 11, 16; *А. Степанович* (Никольский Карагандинской обл.) 10, 13; *М. Строшинский* (Донецк) 9, 10, 16; *К. Трутнев* (Казань) 18; *Н. Федин* (Омск) 10, 12—19, 22; *Л. Халтаров* (Улан-Удэ) 10; *С. Хрулин* (Моршанск) 16; *В. Швейдель* (Великие Луки) 11; *Е. Шевкунов* (Фрунзе) 12, 15; *Р. Широков* (Киев) 13, 15, 16, 18; *С. Шичянин* (Невинномысск) 19; *С. Шишков* (Москва) 13—19, 22; *Е. Шкляр* (Гомель) 16; *А. Шосточенко* (Кишинев) 18; *М. Эфроимский* (Ленинград) 15, 22; *О. Янчук* (п/о Иванополь Житомирской обл.) 12; *В. Яровой* (Ленинград) 22.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Казанский государственный университет им В. И. Ульянова-Ленина

О Казанском государственном университете подробно рассказывалось в «Кванте» № 6 за 1976 год.

Математика
(*письменный экзамен*)

Механико-математический факультет

1. Решить уравнение
$$2\sin 6x = \operatorname{tg} 2x - 2\sin 2x.$$

2. Найти координаты вектора $\vec{p}$, коллинеарного вектору $\vec{q} = (3; -4)$, если известно, что вектор $\vec{p}$ образует с осью Ox тупой угол и $|\vec{p}| = 10$.

3. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

4. На координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству
$$\log_{1+y}(1+\sin x) > 1.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Решить уравнение
$$2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \operatorname{tg} x.$$

2. Решить неравенство
$$|3^x - 3| + 9^x - 3 > 0.$$

3. В правильную четырехугольную пирамиду с высотой H и стороной основания a вписан прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат со стороной b, так, что его нижнее основание лежит на основании пирамиды, а вершины верхнего основания лежат на боковых ребрах пирамиды. При каком b объем вписанного параллелепипеда будет наибольшим? Найти объем при этом значении b.

4. На дороге на расстоянии 10 м друг от друга лежит некоторое количество столбов. Начав с одного крайнего столба, рабочий перенес все столбы по одному к другому крайнему столбу, причем для этого ему в общей сложности пришлось пройти 1,44 км. Сколько столбов лежало на дороге?

Физический факультет

1. Решить уравнение
$$\sin x - \frac{|2\cos x - 1|}{2\cos x - 1}\cdot\sin^2 x = \sin^2 x.$$

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 28, \\ \log_9 x - \log_{\frac{1}{9}} y = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

3. На кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2$ найти точки, в которых касательная параллельна прямой $y = 3x$.

4. Двугранный угол между боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен α, а сторона основания равна a. Найти объем пирамиды.

Физика
(*задачи устного экзамена*)

1. Цилиндр радиуса R и массы m стоит перед ступенькой высоты $h < R$. Какую наименьшую горизонтальную силу, проходящую через ось цилиндра и перпендикулярную к стенке, надо приложить к цилиндру, чтобы он мог подняться на ступеньку? Трение не учитывать.

2. На резиновой нити, длина которой в нерастянутом состоянии l_0, подвешен тяжелый шарик массы m, который равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса; при этом нить отклоняется на угол α. Деформация нити упругая, коэффициент упругости k. Найти угловую скорость вращения ω.

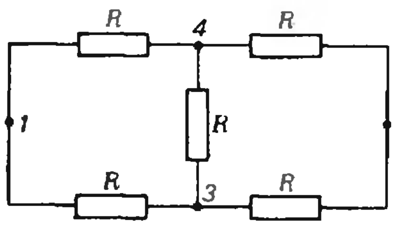
3. Льдина с площадью поперечного сечения S и высотой H плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

4. Шарик плотности $\rho_{ш}$ подвешен на невесомой нити длины l в жидкой среде плотности ρ. Определить период его колебаний. Трением пренебречь.

5. Колеса паровоза имеют радиус $R_0 = 1$ м при $0°$ С. Определить разницу в числах оборотов колеса летом при температуре $t_1 = 25°$ С и зимой при температуре $t_2 = -25°$ С на пути пробега паровоза $l = 100$ км (тепловой коэффициент линейного расширения $\alpha = 1,2\cdot10^{-5}$ K^{-1}).

6. Электромотор питается от батареи с ЭДС $\mathscr{E} = 12$ В. Какую механическую работу совершает мотор за время $t = 1$ с при протекании по его обмотке тока $I = 2$ А, если при полном затормаживании якоря по цепи течет ток $I_0 = 3$ А?

7. В электроплитке сопротивления соединены в схему, показанную на рисунке.



Электроплитка включается в сеть точками *1* и *2*, при этом за некоторое время удается довести до кипения $m_1 = 500$г воды. Сколько воды можно довести до кипения за то же время, если электроплитку включить в сеть точками *1* и *3*? Начальная температура воды в обоих случаях одна и та же. Тепловыми потерями пренебречь.

8. Через двухэлектродную лампу (диод) с плоскими электродами течет ток $I = 10$ мА. Напряжение на лампе $U = 100$ В. С какой силой $|\vec{F}|$ действуют на анод лампы попадающие на него электроны, если скорость их вблизи катода равна нулю? Отношение заряда электрона к его массе $e/m = 1,76 \times 10^{11}$ Кл/кг.

9. В однородном магнитном поле с индукцией $|\vec{B}| = 0,125$ Т расположен проволочный виток таким образом, что его плоскость перпендикулярна магнитным линиям. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, протекший через гальванометр при некотором повороте витка, $q = 8\cdot10^{-2}$ Кл. На какой угол повернулся виток, если его площадь $S = 5\cdot10^3$ см², а сопротивление витка $R = 1$ Ом?

10. Вогнутое зеркало дает действительное изображение точечного источника, расположенного на оптической оси на расстоянии $d = 50$ см от зеркала. Фокусное расстояние зеркала $F = 25$ см. Зеркало разрезали пополам, и его половины отодвинули друг от друга на расстояние $a = 1$ см в направлении, перпендикулярном оптической оси. Как расположены по отношению друг к другу изображения, даваемые половинками зеркала?

В. Вишневский,
О. Соколов,
А. Хасанов

Ярославский государственный университет

О Ярославском государственном университете см. «Квант», 1978, № 6, с. 73.

Математика

(письменный экзамен)

Математический факультет

Вариант 1

1. Найти высоту треугольной пирамиды наибольшего объема, вписанной в шар радиуса R.

2. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7, чтобы цифры не повторялись и крайние цифры были четными?

3. Решить неравенство

$$\log_{x^2-1}(x+1) < 1.$$

4. Решить уравнение

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\cos x - \frac{8}{3}\pi\right) = 1.$$

Вариант 2

1. Прямоугольный параллелепипед вписан в шар радиуса R. Найти поверхность параллелепипеда, если он имеет наибольший возможный объем.

2. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7, чтобы цифры не повторялись и сумма крайних была двузначным числом?

3. Решить неравенство

$$\log_{x^2+3x}(x+3) < 1.$$

4. Решить уравнение

$$2\cos\left[\frac{\pi}{6}\left(\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \sqrt{3}.$$

Физический факультет

Вариант 1

1. Какую часть площади квадрата отсекает парабола, проходящая через две соседние вершины квадрата и касающаяся его стороны в ее середине?

2. Решить неравенство

$$2C_n^5 > 11C_{n-2}^3,$$

где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k.

3. Решить уравнение

$$9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 3^{2x-1}.$$

4. Решить уравнение

$$2 + \cos 4x = 5\cos 2x + 8\sin^6 x.$$

Вариант 2

1. Какую часть площади полукруга отсекает парабола, проходящая через концы диаметра полукруга и касающаяся граничной окружности в точке, равноудаленной от концов диаметра?

2. Решить неравенство

$$C_n^{n-2} + C_{n+1}^{n-1} \leqslant 100,$$

где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k.

3. Решить уравнение

$$4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}.$$

4. Решить уравнение

$$4\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + 3\sin^2 x = 3.$$

Физика

(задачи устного экзамена)

Физический факультет

1. По наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, с высоты $h = 1{,}25$ м из состояния покоя соскальзывает тело. Коэффициент трения тела о плоскость $k = 0{,}2$. Какую скорость приобретет тело после соскальзывания?

2. Мотоциклист совершает вираж с линейной скоростью $v = 72$ км/ч по окружности радиуса $R = 71$ м. Определить угол α отклонения мотоциклиста от вертикали.

3. Стеклянную трубку длины $l = 1$ м наполовину погружают в ртуть. Затем трубку закрывают сверху и вынимают. Какой длины h столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление равно $h_0 = 760$ мм рт. ст.

4. В двух сосудах находится один и тот же газ. Объемы сосудов V_1 и V_2, давление и температура газа в сосудах p_1, T_1 и p_2, T_2 соответственно. После соединения сосудов в них установилась температура T. Найти давление в соединенных сосудах.

5. Два положительных заряда $q_1 = 4\cdot10^{-6}$ Кл и $q_2 = 9\cdot10^{-6}$ Кл находятся на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. Какой заряд и где нужно поместить, чтобы вся система находилась в равновесии? Будет ли равновесие устойчивым?

6. N одинаковых шарообразных капелек ртути заряжены до одного и того же потенциала φ. Каков будет потенциал φ_1 большой капли, получившейся в результате слияния N капель ($N = 15$, $\varphi = 220$ В)?

7. Конденсатор, присоединенный к батарее с напряжением $U = 400$ В проводами с сопротивлением $R = 15$ Ом, имеет первоначальную емкость $C_1 = 3$ мкФ. Затем его емкость равномерно увеличивается за время $t = 0{,}15$ с до $C_2 = 33$ мкФ. Какая энергия выделится при этом в виде тепла в подводящих проводах?

8. Зал с круглым полом радиуса $R = 15$ м освещается лампой, укрепленной в центре потолка. Найти высоту зала, если известно, что наименьшая освещенность стены зала в n раз больше наименьшей освещенности пола ($n = 3$).

9. Вогнутое зеркало дает на стене изображение пламени свечи, увеличенное в n раз ($n = 3$). Расстояние от свечи до зеркала $d = 40$ см. Найти фокусное расстояние F зеркала.

10. Какова кинетическая энергия и скорость фотоэлектронов, вылетающих из натрия при его облучении ультрафиолетовыми лучами ($\lambda = 2{,}1\cdot10^{-5}$ см), если работа выхода электронов из натрия $A_в = 2{,}52$ эВ? Кинетическую энергию электронов выразить в электрон-вольтах.

М. Доброхотова, Н. Михеев, В. Чаплыгин

Дальневосточный государственный университет

(физический факультет)

Физический факультет Дальневосточного государственного университета готовит специалистов-физиков для научно-исследовательских институтов, высших учебных заведений, средних школ и предприятий Дальнего Востока.

Шесть кафедр факультета осуществляют подготовку специалистов по физике твердого тела, молекулярной физике, геофизике, электронике, автоматизации научных исследований и ядерной физике.

Производственную практику студенты проходят, как правило, на местах своей будущей работы. Это институты Дальневосточного научного центра АН СССР (океанологии, автоматики и процессов управления, вулканологии, биологии моря), лаборатории геологоразведывательных управлений, научно-исследовательские суда, работающие по международным программам, конструкторские бюро, заводы и школы Дальнего Востока.

Математика

(устный экзамен)

1. Решить уравнение

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^{(\log_x 11)-2} = 11.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{x-3}(x-1) < 2.$$

3. Сколько различных нечетных пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 0,1,3,4,5?

4. Сколько существует телефонных номеров, содержащих комбинацию 12, если номер состоит из 5 цифр?

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \cos^2 x + \cos x + 3.$$

6. Определить размеры открытого бассейна объемом 32 м³ с квадратным дном, на облицовку дна и стен которого затрачивается наименьшее количество материала.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = -3x^2 - |x| + 3,\quad y = 0.$$

8. При совместной работе двое рабочих могут выполнить задание за 4 часа. Первый

из них, работая отдельно, может выполнить задание на 6 часов раньше, чем второй. За сколько часов каждый в отдельности может выполнить задание?

9. Найти высоту h треугольной пирамиды, длины боковых ребер которой равны a, b, c, а все плоские углы при вершине прямые.

10. Около правильной треугольной пирамиды с плоским углом α при вершине описан шар. Найти отношение объема шара к объему пирамиды.

Физика

(задачи устного экзамена)

1. Шофер автомобиля внезапно заметил недалеко от себя стену, перпендикулярную к направлению его движения. Что выгоднее сделать, чтобы предотвратить аварию: затормозить или повернуть в сторону?

2. Небольшое тело скользит вниз с вершины сферы радиуса R. На какой высоте от вершины тело оторвется от поверхности сферы? Трением пренебречь.

3. Дана узкая стеклянная трубка, запаянная с одного конца. Трубка содержит воздух, отделенный от окружающей атмосферы столбиком ртути. Имеется также миллиметровая линейка. Определите с их помощью атмосферное давление.

4. Какое напряжение возникает в сечении латунного цилиндра, если длина его остается неизменной при повышении температуры от $t_1 = 0°C$ до $t_2 = 100°C$? Коэффициент линейного расширения латуни $\alpha = 18\cdot10^{-6}$ град$^{-1}$; модуль упругости $E = 9{,}8\cdot10^{10}$ Н/м^2.

5. По газопроводу течет углекислый газ при давлении $p = 5$ атм и температуре $t = 17°C$. Какова скорость движения газа в трубе, если за $\tau = 5$ мин через площадь поперечного сечения трубы $S = 6\cdot10^{-4}$ м^2 протекает $m = 2{,}5$ кг углекислого газа?

6. Маленький металлический шарик массы $m = 1$ г, которому сообщен заряд $q = +10^{-7}$ Кл, брошен издалека со скоростью $|\vec{v}| = 1$ м/с в металлическую сферу с зарядом $Q = +3\cdot10^{-7}$ Кл. При каком минимальном значении радиуса сферы шарик достигнет ее поверхности?

7. Определить количество электронов, образующих заряд пылинки массы $m = 5\cdot10^{-9}$ г, если она находится в равновесии в электрическом поле, создаваемом двумя заряженными пластинами. Разность потенциалов между пластинами $\Delta\varphi = 3000$ В, а расстояние между ними $d = 2$ см. Заряд одного электрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

8. В однородное магнитное поле с индукцией $|\vec{B}| = 0{,}1$ Т помещен проводник длины $l = 20$ см с сопротивлением $R = 10$ Ом. Проводник соединен с источником тока, ЭДС которого $\mathscr{E} = 10$ В и внутреннее сопротивление $r = 10^{-4}$ Ом. Под действием магнитного поля проводник начинает перемещаться перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $|\vec{v}| = 10$ м/с. Определить силу тока в проводнике.

9. Солнечный луч, проходящий через отверстие в ставне, составляет с поверхностью стола угол 48°. Как надо расположить плоское зеркало, чтобы изменить направление луча на горизонтальное?

10. Какую наименьшую разность потенциалов нужно приложить между катодом и анодом, чтобы полностью затормозить фотоэлектроны, вылетающие из катода при освещении его лучами с длиной волны $\lambda = 200$ нм, если работа выхода $A = 4$ эВ? Постоянная Планка $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c = 3\cdot10^8$ м/с, заряд электрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Н. Александрова,
В. Шлык,
Л. Юдина

Московский архитектурный институт

Московский архитектурный институт основан в 1866 году. Ежегодно выпускает 250—300 архитекторов широкого профиля, получающих специализацию в области градостроительства, архитектуры жилых и общественных зданий, архитектуры промышленных зданий и сооружений, архитектуры и планировки сельских населенных мест, архитектуры интерьера зданий, ландшафтной архитектуры, реставрации памятников архитектуры. Институт имеет четыре факультета: общей подготовки, градостроительства, промышленного строительства, жилого и общественного строительства. В течение пяти с половиной лет студенты института проходят полный курс по программе 32 кафедр, обеспечивающих всестороннюю подготовку молодых специалистов в области архитектурного проектирования, художественной графики, теории и истории архитектуры, специальных инженерных, экономических, общественно-политических дисциплин, физической подготовки, гражданской обороны.

Обучение в институте дневное и вечернее. Большинство выпускников института распределяются среди архитектурно-проектных и научно-исследовательских институтов Москвы и Московской области. Довузовская подготовка желающих получить образование в Московском архитектурном институте включает подготовительное отделение и три вида подготовительных курсов — для школьников 9—10 классов по рисунку и черчению, для демобилизованных из рядов Советской Армии — по программе вступительных экзаменов, заочные курсы для жителей Москвы и Московской области.

Экзамены в институт проводятся по следующим предметам: рисованию гипсовой головы и композиции (профилирующие предметы), литературе (сочинение), математике и физике (устно), проекционному черчению. Ежегодно принимается на I курс института 350 человек — на дневное отделение, 75 человек — на вечернее.

Институт располагает уникальной библиотекой, насчитывающей более 100 тысяч томов книг по архитектуре и искусству.

Математика

(устный экзамен)

Билет 1

1. Производные функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$.

2. Дано $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m$.

Найти: 1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$

2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$

3) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

3. Центры четырех окружностей радиуса a находятся в вершинах квадрата со стороной a. Найти площадь фигуры, образованной дугами этих четырех окружностей и лежащей внутри квадрата.

Билет 2

1. Объем фигур вращения.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2^{-x}} - 2^{1-x}}.$$

3. Статуя высотой 5 м стоит на постаменте, высота которого 6 м. На каком расстоянии должен встать человек ростом (до уровня глаз) 1,6 м, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

Физика

(задачи устного экзамена)

1. Пуля массой m попадает в деревянный брусок массы M, подвешенный на нити длиной l, и застревает в нем. Определить, на какой максимальный угол отклонится нить, если скорость пули равна $|\vec{v}|$.

2. Шар массой M опирается на две гладкие плоскости, образующие угол $\varphi = 90°$, причем левая плоскость составляет с горизонтом острый угол α. Определить силы, с которыми шар давит на плоскости.

3. Тело падает с высоты $H = 360$ м с начальной скоростью $|\vec{v}_0| = 20$ м/с и углубляется в песок на глубину $s = 0{,}5$ м. Определить среднюю силу сопротивления почвы. Масса тела $m = 0{,}1$ кг, сопротивление воздуха не учитывать.

4. Три одинаковых шарика массой $m = 0{,}1$ г каждый подвешены в одной точке на шелковых нитях длиной $l = 20$ см. Какие одинаковые заряды следует сообщить шарикам, чтобы каждая нить составляла с вертикалью угол $\alpha = 30°$?

5. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода закипает через $t_1 = 15$ мин, при включении второй обмотки — за $t_2 = 30$ мин. Через сколько минут закипит чайник, если обе обмотки включить последовательно? В каком случае КПД чайника больше и почему?

6. Найти ток короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если она при нагрузке $I_1 = 5$ А отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 9{,}5$ Вт, а при нагрузке $I_2 = 8$ А — мощность $P_2 = 14{,}4$ Вт.

Ю. Мещеряков,
В. Смирнов,
А. Степанов,
В. Фролов

Домино-пасьянс

Приставляя косточки домино друг к другу по правилам игры в домино, сложите из полного комплекта косточек (28 штук) фигуру, изображенную на рисунке 1. Затем уложите эти 28 косточек в виде узора, изображенного на рисунке 2, так, чтобы косточки снова соприкасались одинаковыми значениями очков. То же задание — для фигуры, изображенной на рисунке 3.

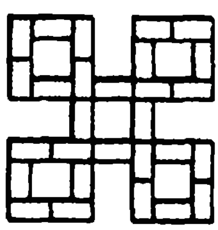


Рис. 1.

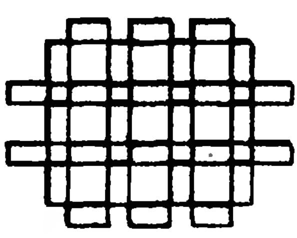


Рис 2.

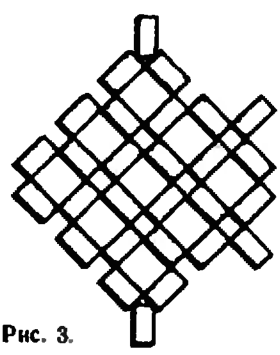


Рис. 3.

Л. Мочалов,
П. Толкач

Новые книги

Мы продолжаем публиковать аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям. В этом номере мы расскажем о книгах, вышедших в первом квартале 1979 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Хинчин А. Я. *Три жемчужины теории чисел.* Издание 3-е. Объем 4 л., тираж 50 000 экз., цена 20 к.

Эта замечательная книга посвящена изложению трех теорем теории чисел.

Первая теорема носит имя голландского математика Ван дер Вардена и имеет следующую формулировку:

Пусть k и l — произвольные натуральные числа. Тогда существует такое натуральное число n, что при разбиении любого отрезка натурального ряда длины n любым способом на k классов (среди которых могут быть и пустые) по крайней мере в одном из этих классов найдется арифметическая прогрессия длины l.

Во второй главе рассматривается гипотеза Ландау — Шнирельмана, утверждающая верность некоторого неравенства. Выдвинутая в 1931 году, она привлекла внимание весьма широкого круга исследователей во всех странах, но оказалась трудноподдающейся; только в 1942 году ее доказал молодой американский математик Манн. Год спустя Артин и Шерк опубликовали новое ее доказательство, гораздо более изящное, хотя по-прежнему совершенно элементарное. По мнению Хинчина, конструкция Артина — Шерка является «замечательным сочетанием структурной тонкости и предельной элементарности метода».

Наконец, в третьей главе приводится элементарное решение проблемы Варинга; доказывается, что *для любого натурального n существует такое натуральное k, что любое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более чем k n-х степеней каких-то натуральных чисел.* Эта гипотеза была высказана Варингом еще в XVIII столетии (ее частный случай — замечательная теорема Лагранжа: *каждое натуральное число есть сумма не более чем четырех квадратов*), но только в начале нашего века (1907 г.) Гильберт доказал ее справедливость во всей полноте. Однако его доказательство было очень громоздким и неэлементарным, как, впрочем, и более поздние доказательства Харди, Литлвуда и И. М. Виноградова. Поэтому математики, имея дело с такой внешне элементарной задачей, как проблема Варинга, продолжали поиски такого ее решения, которое не нуждалось бы в понятиях и методах, выходящих за пределы элементарной арифметики. Элементарное решение получил советский математик Ю. В. Линник в 1942 году (впрочем, его «элементарное» доказательство тоже очень не просто). Изложению доказательства Линника посвящена третья глава книги.

Автор книги А. Я. Хинчин — широко известный специалист по теории чисел и замечательный педагог. Его книга «Три жемчужины теории чисел», безусловно, — одна из жемчужин популярной математической литературы. Поэтому хотелось бы, чтобы все любящие математику старшеклассники, купив эту книгу, потрудились над ней с карандашом и бумагой.

2-е издание выходило в 1948 году.

Издательство «Мир»

2. Дьюдени Г. *Кентерберийские головоломки.* Перевод с англ. Объем 21 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 40 к.

Автор этой книги Генри Эрнест Дьюдени (1857—1930) — один из известнейших создателей головоломок; наряду с Сэмом Лойдом он по праву считается классиком этого жанра. Вряд ли его нужно представлять читателям «Кванта»: в 1975 году издательство «Мир» в серии книг по занимательной математике выпустило в свет сборник Дьюдени «520 головоломок», несколько задач из которого были перепечатаны нашим журналом («Квант», 1975, № 2).

«Кентерберийские головоломки» — прекрасный сборник задач. Собственно «кентерберийские головоломки» составляют лишь первую его главу. История ее написания такова. Известно, что классическое произведение английской литературы XIV века, книга Джеффри Чосера «Кентерберийские рассказы» осталась незаконченной. Воспользовавшись этим, Дьюдени дополнил ее новыми, якобы найденными, страницами: персонажи Чосера задают друг другу разные занимательные задачи. Глава «Кентерберийские головоломки» задает тон всей книге: каждая последующая глава (кроме одной) также имеет свою сюжетную линию; почти каждая головоломка облечена в форму занимательной истории, много ярких персонажей, непринужденных диалогов. Своей беллетризованностью сборник «Кентерберийские головоломки» выделяется среди всех книг Дьюдени. По стилю его, пожалуй, можно сравнить с книгой Льюиса Кэррола «История с узелками» (М., «Мир», 1973).

Перевод сборника «Кентерберийские головоломки» (выполненный Ю. Сударевым) — приятное событие. Настоящее издание дополнено головоломками из еще одного известного сборника Дьюдени «Математические развлечения» (1917 г.), они собраны в главах «Вечер парадоксов» и «Задачи на шахматной доске».

Вот как, например, начинается глава, посвященная шахматным головоломкам: «От сильного порыва ветра каминная труба сорвалась с крыши и рухнула прямо под ноги случайному прохожему. Он сказал спокойно:

— Мне это ни к чему: я не курю.

Некоторые читатели, увидев головоломку на шахматной доске, склонны сделать столь же невинное замечание:

— Мне это ни к чему: я не играю в шахматы».

Конечно, никакой пересказ не в состоянии заменить самой книги. Несомненно, читатель сумеет оценить ее по достоинству сам.

Физика

Издательство «Наука»

1. Бендриков Г. А. и др. *Задачи по физике.* Издание 4-е, исправленное. Объем 26 л., тираж 300 000 экз., цена 95 к.

Этот сборник предназначен в помощь поступающим в вузы. В нем помещены задачи по всем разделам программы по физике. К большинству задач даны подробные решения или указания.

2. Ланге В. Н. *Экспериментальные физические задачи на смекалку.* Издание 2-е, исправленное и дополненное. (Библиотечка физико-математической школы.) Объем 7 л., тираж 300 000 экз., цена 20 к.

Основная цель книги состоит в воспитании навыков нестандартного мышления. Знакомство с историей физики убедительно показывает, что успех эксперимента часто определяется применением новых, совершенно неожиданных, специально для этого случая разработанных методов измерения. В книге приведено свыше ста задач, в которых предлагается придумать способ измерения некоторых величин, используя самые примитивные и элементарные приборы, казалось бы, совсем неподходящие для этой цели. Чтобы облегчить решение задач, введен раздел «Подсказки». В конце книги приведен подробный разбор задач.

Книга рассчитана на учащихся старших классов средних школ, интересующихся физикой, и учащихся физико-математических школ; может быть полезна также преподавателям физики средних школ.

3. Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. *Справочное руководство по физике для учащихся средней школы, абитуриентов вузов и самообразования.* Издание 2-е, исправленное. Объем 30 л., тираж 200 000 экз., цена 1 р. 40 к.

В книге даны определения всех основных физических понятий, сформулированы физические законы и кратко разъяснена сущность описываемых ими явлений. Руководство содержит сведения по всем разделам курса физики, которые изучаются в средней школе и средних специальных учебных заведениях. В некоторых главах приведены примеры решения задач.

Руководство по физике рассчитано на школьников старших классов, учащихся ПТУ, техникумов и слушателей подготовительных отделений вузов. Оно может быть использовано абитуриентами при подготовке к приемным экзаменам в вузы, а также теми, кто интересуется физикой и занимается самообразованием.

4. Перельман Я. И. *Занимательная физика.* Книга 1. Издание 20-е, исправленное. Объем 12 л., тираж 500 000 экз., цена 40 к.

Эта книга написана известным популяризатором и педагогом Яковом Исидоровичем Перельманом. Автор не ставил перед собой задачи изложить школьный курс физики. В книге очень популярно и интересно излагаются различные парадоксы, головоломки, задачи, опыты, замысловатые вопросы и рассказы из области физики. Она будет понятна даже школьникам 5—7 классов. Несмотря на «солидный возраст», книга «устарела» лишь в очень незначительной степени.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Мир»

5. Гернек Ф. *Альберт Эйнштейн.* Перевод с немецкого. Объем 5 л. тираж 50 000 экз., цена 30 к.

В книге профессора университета им. Гумбольдта в Берлине Ф. Гернека рассказано не только о научных достижениях А. Эйнштейна, но и об основных этапах его жизненного пути и о его философских взглядах.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

«Атомиздат»

6. Дубовой Э. И. *Таинственный мир элементарных частиц.* Объем 9 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

Книга в популярной форме знакомит читателя с проблемами физики элементарных частиц и современными экспериментальными способами познания мира частиц, с результатами новейших исследований в этой области. Описаны основные советские и зарубежные ускорители и физические установки, обсуждены экспериментальные возможности и теоретические перспективы нового направления в физике элементарных частиц — исследований на встречных пучках в накопительных кольцах. Хорошо иллюстрированная книга завершается таблицей элементарных частиц с акцентом на «белые пятна» в ней.

Книга рассчитана, прежде всего, на выпускников школ и преподавателей физики.

Издательство «Просвещение»

7. Спасский Б. И. *Физика в ее развитии.* Пособие для учащихся. Объем 14 л., тираж 100 000 экз., цена 55 к.

Автор дает исторический обзор основных этапов развития физики, начиная с древности и кончая первой половиной XX века. Доступным для учащихся языком, с минимальным использованием математического аппарата, без ущерба для точности и глубины изложения, в книге рассмотрено развитие таких физических понятий, как масса, сила, работа, температура и т. д. Большое внимание уделено вопросам мировоззренческого характера.

И. Клумова,
М. Смолянский

У истоков атомной энергетики

Это произошло в августе 1955 года в Женеве, на Первой международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Тысячная аудитория Дворца наций, в котором проходила конференция, нарушив строгие правила процедуры, запрещающие аплодировать докладчикам, встала и бурными овациями проводила директора первой в мире советской атомной электростанции члена-корреспондента Академии наук СССР Дмитрия Ивановича Блохинцева, рассказавшего делегатам об этой станции.

Атомная электростанция (АЭС) вступила в строй в июне 1954 года, положив начало эре мирного использования атомной энергии. Таков был замечательный итог работы большого коллектива ученых, инженеров, техников, строителей, которым пришлось пройти по неизведанным путям. Об этой работе и рассказывается в небольшой книжке Д. И. Блохинцева «Рождение мирного атома» (М., «Атомиздат», 1977).

Началось все вскоре после окончания войны. Неподалеку от Москвы, в маленьком городке Обнинске возникла физическая лаборатория, превратившаяся со временем в Физико-энергетический институт. Небольшая группа ученых — создателей этого института — приступила к работе почти на пустом месте. Д. И. Блохинцев вспоминает: «...Дощатые барвки; неуютные «финские» домики «птээровцев» и «научников»; случайные здания, приспособленные для лабораторий и управлений; под ногами жидкая глина, в которой оставались резиновые сапоги (некоторые подвязывали их веревкой) и безнадежно вязли машины. Основное здание лаборатории, ныне реконструированное, осталось от колонии детей, прибывших из Испании в 1936 году; другое здание — особняк, принадлежавший до революции семье Морозовых (известных фабрикантов-текстильщиков). В светелке этого старого здания, которое позднее было превращено в гостиницу и приняло немало почетных гостей, в те времена жил... одинокий старый козел, пугавший запоздалых прохожих».

Тем не менее год от года институт рос и набирал силу. В 1951 году Д. И. Блохинцеву и его товарищам по работе было поручено приступить к конструированию первой атомной электростанции.

Не хватало энергии. Время от времени все погружалось в темноту и холод. Но во много раз острее ощущалась нехватка опыта и знаний — ведь по такому пути еще никто не проходил. Вот как об этом говорится в книге: «По-видимому, в каждом новом деле бывают по крайней мере две неясности и две ясности: первая неясность — когда люди совсем еще ничего не знают о предмете, затем наступает первая ясность — когда все кажется изумительно очевидным. Далее наступает вторая неясность, когда отчетливо понимаешь, что, в сущности, ничего не знаешь, а только думал, что знаешь. И, наконец, появляется зрелое знание и полное владение делом. В описываемый период мы, участники создания АЭС, находились в состоянии, так сказать, первой ясности. На самом деле количество проблем, которые предстояло решить, возрастало по мере углубления в работу над реактором. И не раз у нас проходил холодок по спине от ощущения возможной несовместимости уже принятых конструктивных решений с новыми обстоятельствами, ранее не принятыми во внимание».

Энтузиазм и самоотверженный труд всех сотрудников, число которых быстро увеличивалось по мере развертывания исследовательских и конструкторских работ, помощь других научных коллективов, работавших в области ядерной физики, позволили, успешно преодолев невероятные трудности, правильно выбрать тип атомного реактора, создать надежную систему защиты от радиоактивных излучений, сконструировать и построить станцию, уверенно проработавшую четверть века и сегодня еще продолжающую свою службу.

9 мая 1954 года атомный реактор первой АЭС ожил — в нем началась цепная реакция деления урана. Однако, чтобы наладить работу нового реактора, понадобилось еще полтора месяца. 26 июня был подан горячий пар на турбогенератор — освобожденная энергия атомных ядер по проводам потекла к потребителям. Это была огромная победа советской науки и техники, и ее по достоинству оценило все прогрессивное человечество.

Основное содержание книги — живой, правдивый, захватывающий рассказ очевидца о том, как рождалась первая АЭС. В заключительной части книги Д. И. Блохинцев сообщает также интересные подробности о создании первого реактора на быстрых нейтронах и первого импульсного реактора, предложенного автором и переданного потом в Дубну, в Объединенный институт ядерных исследований.

Читая эту книгу, видишь, как трудно быть первопроходцами в науке, но как захватывающе интересен труд ученых и какие замечательные результаты приносит он человечеству.

В. Лешковцев

Читатели советуют

1. $2(2-a)^{-1}$ при $1 \leqslant a < 2$; $2(a-2)^{-1}\sqrt{a-1}$ при $a > 2$. Указание. Положить $a = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, где $0 \leqslant \alpha < \pi/2$, и рассмотреть отдельно случаи $0 \leqslant \operatorname{tg}\alpha < 1$ и $\operatorname{tg}\alpha > 1$.

2. Указание. Сделать подстановку $b = a\cos\varphi$, где $0 < \varphi < \pi$.

3. Указание. Разделить обе части неравенства на его правую часть и положить

$$\frac{d}{a} = \operatorname{tg}^2\alpha,\ 0 \leqslant \alpha < \pi/2,$$

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tg}^2\beta,\ 0 \leqslant \beta < \pi/2.$$

4. Указание. Обе части неравенства разделить на c и сделать подстановку

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ 0 < \alpha < \pi/2,$$

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{\cos^2\beta},\ 0 < \beta < \pi/2.$$

Знак равенства достигается при $\alpha + \beta = \pi/2$.

5. $x = 16$. Указание. Положить $x = 16\sin^2\varphi$, где $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

6. а) Указание. Ввести векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$ и, разложив $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$ по этим векторам, рассмотреть равенство

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} = 0;$$

получить отсюда, что $\cos\hat{A} = {}^2/_3$. Далее доказать, что $|BD| = \frac{1}{4}|DF|$. б) $N = {}^1/_{30}$.

7. $x = 2$, $y = 2$. Указание. Предварительно доказать, что если $z \geqslant 1$, то

$$\frac{\sqrt{z-1}}{z} \leqslant \frac{1}{2}.$$

8. $x = 0$, $y = 4$, $z = 0$. Указание. Из первого неравенства видно, что $\sqrt{x+y} \geqslant 2$, т. е. $x + y \geqslant 4$. Так как правая часть второго неравенства не превосходит 1, $x + y - 4 \leqslant 0$. Следовательно, $x + y = 4$.

10. Уравнение плоскости удовлетворяется не для произвольных значений x, y, z, а лишь для вполне определенных, причем своих для каждой плоскости. Поэтому, если $(x_\alpha;\ y_\alpha;\ z_\alpha)$ и $(x_\beta;\ y_\beta;\ z_\beta)$ — произвольные точки плоскостей α, β, то в результате вычитания из равенства (10) равенства (9) получится соотношение

$$a(x_\beta - x_\alpha) + b(y_\beta - y_\alpha) + c(z_\beta - z_\alpha) + \frac{D}{k} - d = 0,$$

из которого равенство $D = kd$ не следует.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина

Математика

Механико-математический факультет

1. $x_1 = \frac{\pi}{2}k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi l$ $(k,\ l \in Z)$. 2. $\vec{p} = (-6;\ 8)$.

3. $\dfrac{a^2\cdot\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{12\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ $(k \in Z)$. 2. $]0;\ +\infty[$.

3. $b = \frac{2}{3}a$, $V = \frac{4}{27}a^2H$. 4. 13.

Физический факультет

1. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi l$ $(k,\ l \in Z)$.

2. $\{(9;\ 3),\ (3;\ 9)\}$. 3. $(1-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ и $(1+\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$. 4. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos\alpha}}$.

Указание. Пусть $SABCD$ — данная пирамида, $[BF] \perp [SA]$ (тогда $[DF] \perp [SA]$ и $\widehat{BFD} = \alpha$), $[SO] \perp (ABC)$, $\widehat{OSA} = \varphi$. Поскольку $\widehat{OSA} = \widehat{FOA}$, из $\triangle FOA$ получаем $\cos\varphi = \frac{|OF|}{|OA|} = \frac{|OF|}{|OD|} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. (Отсюда вытекает, что $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right[$.)

Физика

1. $|\vec{F}_{\min}| \approx mg\sqrt{2h/R}$.

2. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l_0\cos\alpha + mg/k}}$.

3. $A = \frac{1}{2}\rho_в SH^2 g(1-\rho_л/\rho_в)^2$, где $\rho_л$ и $\rho_в$ — плотности льда и воды соответственно.

4. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g(1-\rho/\rho_ш)}}$.

5. $\Delta n = \dfrac{l}{2\pi R_0}\left(\dfrac{1}{1+\alpha t_2} - \dfrac{1}{1+\alpha t_1}\right) \approx$

$\approx 9{,}6$ оборота.

6. $A = \mathscr{E} I\,(1 - I/I_0) = 8$ Дж.

7. $m_2 = m_1 \dfrac{R_1}{R_2} = m_1 \dfrac{R}{5/8R} = 800$ г.

8. $|\vec{F}| = l\sqrt{\dfrac{2U}{e/m}} \approx 3{,}4\cdot 10^{-7}$ Н.

9. $\alpha = \arccos\left(\dfrac{qR}{|\vec{B}|\,S} - 1\right) =$

$= \arccos 0{,}28 \approx 74°$.

10. $x = 2a = 2$ см.

Ярославский государственный университет

Математика

Математический факультет

Вариант 1.

1. $\dfrac{4}{3}R$. Предупреждение. Не забудьте доказать, что пирамида наибольшего объема — правильная. 2. $A_3^2\cdot A_5^4 = 720$. 3. $]1; \sqrt{2}[\ \cup\ ]2; +\infty[$. Указание. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 1, \\ 0 < x+1 < x^2 - 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 0 < x^2 - 1 < 1, \\ x + 1 > x^2 - 1. \end{cases}$$

Можно также воспользоваться тождеством $\log_{ab} a = \dfrac{1}{1+\log_a b}$. 4. $x = \pi + 2\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$.

Указание. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\dfrac{\pi}{3}\cos x - \dfrac{8}{3}\pi = \pi k\ (k\in\mathbf{Z})$.

Вариант 2.

1. $8R^2$. Предупреждение. Не забудьте доказать, что основанием прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема является квадрат. 2. $12A_5^3 = 720$.

3. $\left]0; \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right[\ \cup\ ]1; +\infty[$.

4. $x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi k\ (k\in\mathbf{Z})$.

Физический факультет

Вариант 1

1. $\dfrac{S_1+S_2}{S} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{S_3}{S} = \dfrac{2}{3}$ (см.

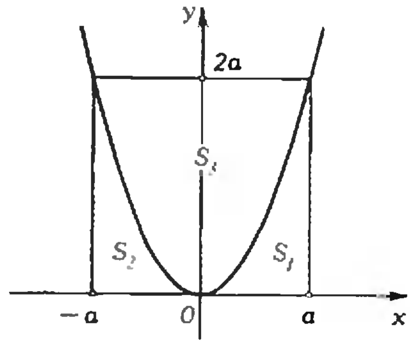


Рис. 1.

рис. 1; S — площадь квадрата). Указание. В системе координат, указанной на рисунке 1, уравнение данной параболы имеет вид $y = dx^2$. 2. $n > 11$. 3. $\left\{\log_{\frac{9}{2}}\dfrac{9}{2\sqrt{2}}\right\}$.

4. $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + \pi l\ (k, l\in\mathbf{Z})$.

Вариант 2

1. $\dfrac{S_1+S_2}{S} = \dfrac{3\pi-8}{3\pi}$; $\dfrac{S_3}{S} = \dfrac{8}{3\pi}$ (см. рис. 2; S — площадь полукруга). Указание. В системе координат, указанной на рисунке 2, уравнение данной параболы имеет вид $y = -dx^2 + R$. 2. $2 \leqslant n \leqslant 10$. 3. $\left\{\log_{\frac{3}{2}} 2,\ 2\log_{\frac{3}{2}} 2\right\}$. 4. $x_1 =$

$= \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $x_2 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi l\ (k, l\in\mathbf{Z})$.

Физика

1. $|\vec{v}| = \sqrt{2gh\,(1 - k\operatorname{ctg}\alpha)} \approx 4$ м/с.

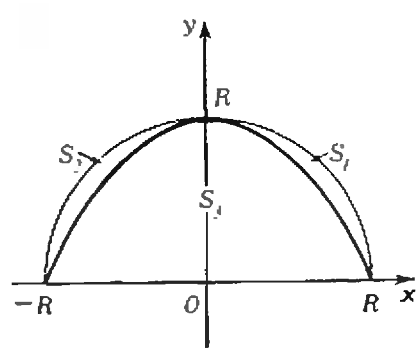


Рис. 2.

2. $\alpha = \operatorname{arctg}(v^2/Rg) \approx 30^\circ$.

3. $h = \dfrac{h_0 + l - \sqrt{h_0^2 + l^2}}{2} \approx 252$ мм.

4. $p = \dfrac{T}{V_1 + V_2}\left(\dfrac{p_1V_1}{T_1} + \dfrac{p_2V_2}{T_2}\right)$.

5. Заряд $q_3 = -1{,}44\cdot 10^{-6}$ Кл надо поместить между зарядами q_1 и q_2 на расстоянии $x = 12$ см от первого заряда.

6. $\varphi_1 = \varphi N^{\frac{2}{3}} \approx 1340$ В.

7. $Q = U^2(C_2 - C_1)^2R/l \approx 1{,}44\cdot 10^{-2}$ Дж.

8. $H = R/n = 5$ м.

9. $F = \dfrac{n}{n+1}d = 30$ см.

10. $E_к = \dfrac{hc}{\lambda} - A_в \approx 3{,}37$ эВ,

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - A_в\right)} \approx 1{,}09\cdot 10^6 \text{ м/с},$$

где $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с и $c = 3\cdot 10^8$ м/с.

Дальневосточный государственный университет (физический факультет)

Математика

1. $\dfrac{1}{11}$. 2. $]3;\ 4[\ \cup\ ]5;\ +\infty[$.

3. $3\cdot 3\cdot P_3 = 54$. 4. 3970. Указание. Разбейте пересчитываемое множество на подмножества в зависимости от того, где стоит комбинация 12. Не ошибитесь: эта комбинация не обязана входить только один раз

5. $\max\limits_{R} f(x) = f(0) = 5$, $\min\limits_{R} f(x) = f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) = \dfrac{11}{4}$. 6. Сторона основания (дна) — 4 м, глубина — 2 м. 7. $S =$

$$= 2\int_0^{\frac{\sqrt{37}-1}{6}} (-3x^2 - x + 3)dx = \frac{37\sqrt{37} - 55}{54}.$$

8. Первый — за 6 ч, второй — за 12 ч.

9. $\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$. Указание. Введите систему координат с началом в вершине данной пирамиды и с осями «по ребрам». Далее см. задачу 14 в «Геометрии 10».

10. $\dfrac{3\sqrt{3}\pi}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}(2\cos\alpha + 1)^2}$.

Физика

1. Выгоднее затормозить, поскольку длина тормозного пути вдвое меньше радиуса поворота.

2. $h = R/3$.

3. $p = \rho g h\dfrac{l_2 + l_1}{l_2 - l_1}$, где h — высота ртутного столбика, ρ — плотность ртути, l_1 (l_2) — длина воздушного столба, когда трубка стоит вертикально отверстием вверх (вниз).

4. $\sigma = \alpha E(t_2 - t_1) \approx 1{,}8\cdot 10^8$ Н/м².

5. $|\vec{v}| = \dfrac{mRT}{p\mu S\tau} = 1{,}55$ м/с.

6. $R_{\min} = \dfrac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m|\vec{v}|^2} = 0{,}54$ м.

7. $n = \dfrac{mgd}{e\Delta\varphi} \approx 2\cdot 10^3$.

8. $I = \dfrac{\mathscr{E} - |\vec{B}|\,l\,|\vec{v}|}{R + r} \approx 1$ А.

9. Зеркало надо расположить под углом 66° или 24° к поверхности стола.

10. $U_{\min} = \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A\right) = 2{,}2$ В.

Задачи на геометрический смысл производной

(см. «Квант» № 2)

1. В точке с абсциссой $x = 1$ графики функций не пересекаются, но имеют в соответствующих точках параллельные между собой касательные.

2. Например: а) рис. 3, б) рис. 4.

3. Согласно условиям 1, 2 (перед задачей 6) составляем систему

$$\begin{cases} x_0^3 - x_0 + 1 = 3x_0^2 - 4x_0 + a, \\ 3x_0^2 - 1 = 6x_0 - 4. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x_0 = 1$. Тогда из первого уравнения следует $a = 2$.

4. Пусть вершина подвижной параболы имеет абсциссу $a > 0$ (рис. 5). Тогда уравнение параболы имеет вид $x = y^2 + a$, а ее верхней части $y = \sqrt{x - a}$. Согласно тем же условиям 1, 2 имеем

$$\begin{cases} \sqrt{x_0 - a} = x_0^2, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x_0 - a}} = 2x_0. \end{cases}$$

Перемножая уравнения системы, получим $2x_0^3 = \dfrac{1}{2}$, откуда $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Тогда $y_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$; $a = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$.

5. Уравнение параболы имеет вид $x = ay^2 - 2$, где $a > 0$, а ее верхней части — $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{a}}$. Из тех же условий 1, 2

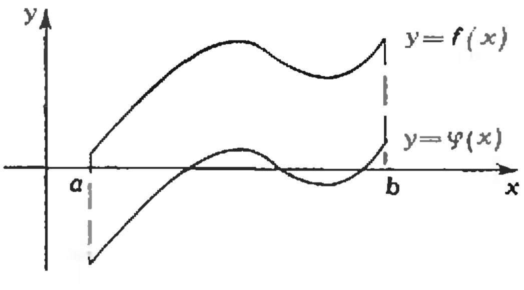


Рис. 3.

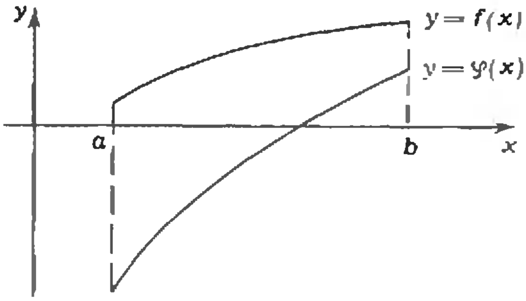


Рис. 4.

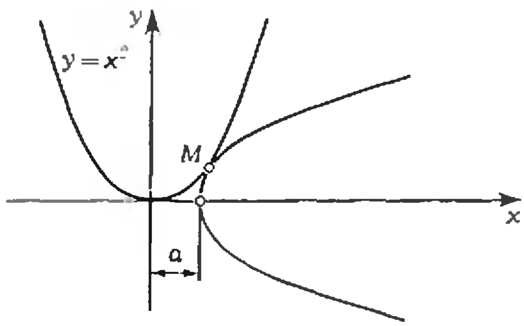


Рис. 5.

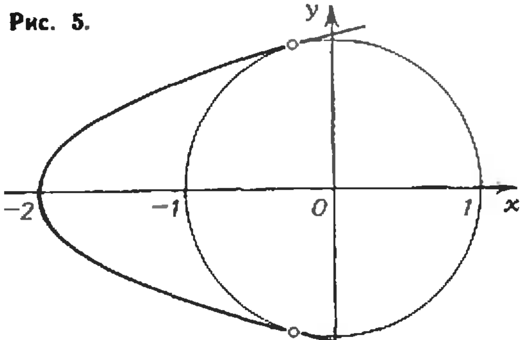


Рис. 6.

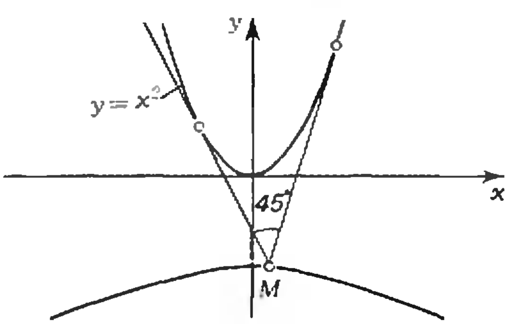


Рис. 7.

имеем

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x_0+2}{a}} = \sqrt{1-x_0^2}, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x_0+2}} = -\dfrac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}. \end{cases}$$

Перемножая соответственно левые и правые части уравнений, получим $x_0 = -\dfrac{1}{2a}$.

Подставляя значение x_0 в первое уравнение, получим $4a^2 - 8a + 1 = 0$, откуда $a = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Так как $-1 \leqslant x_0 < 0$, то есть $-1 \leqslant -\dfrac{1}{2a} < 0$, то должно быть $a \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, значение $a = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ не подходит. Итак, касаться окружности будет парабола $x = \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)y^2 - 2$ (рис. 6).

6. Обозначим через $M(X;\, Y)$ произвольную точку искомой кривой (рис. 7). Пусть прямая, проходящая через эту точку, касается параболы в точке $(x_0;\, x_0^2)$. Тогда $x_0 = X \pm \sqrt{X^2 - Y}$ (см. решение задачи 4). Угловые коэффициенты соответствующих касательных следующим образом выразятся через X и Y: $K_1 = 2(X + \sqrt{X^2 - Y})$; $K_2 = 2(X - \sqrt{X^2 - Y})$. Вычислим тангенс угла между касательными и приравняем его к $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$:

$$1 = \frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 \cdot K_2} = \frac{-4\sqrt{X^2 - Y}}{1 + 4Y}. \tag{1}$$

Разрешим полученное уравнение относительно Y:

$$(1+4Y)^2 = 16(X^2 - Y),$$

$$Y = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{2} + X^2}.$$

Нетрудно проверить, что условию задачи удовлетворяет лишь уравнение $Y = -\dfrac{3}{4} - \sqrt{\dfrac{1}{2} + X^2}$, так как из (1) следует, что $Y \leqslant -\dfrac{1}{4}$. Второе же уравнение $Y = -\dfrac{3}{4} + \sqrt{\dfrac{1}{2} + X^2}$ определяет кривую, из любой точки которой парабола видна под углом 135°.

7. Геометрическая модель задачи: найти точку пересечения прямых, касающихся параболы $s = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$ в точках с абсциссами t_1 и t_2.

8. Геометрическая модель данной задачи, очевидно, выглядит следующим образом: в какой точке t_0 прямая,

проходящая через точку $(t_1;\ s_1)$, может касаться параболы $s = \frac{at^2}{2}$? Метод решения этой задачи рассмотрен в задаче 4. Отметим лишь, что аналитическое решение приводит к двум значениям t_0, одно из которых приходится отбросить, так как оно больше, чем t_1, и поэтому не подходит по смыслу нашей задачи. Из геометрических соображений ясно, что если $s_1 > \frac{at_1^2}{2}$, то нет решений. Это тот случай, когда расстояние s_1 настолько велико, что ракета за время t_1 не успеет его пройти, даже не отключая двигателя.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 3)

1. Задачи такого типа удобно решать, используя таблицу. Числа, проставленные в клетках таблицы, обозначают номер шага решения, на котором доказывается, что данная буква не может принять некоторое значение или же принимает его (тогда это значение выделяется цветом).

1. Поскольку имеются все пять *частных произведений* (*ЧП*) и все они отличны от множимого, множитель не содержит цифр 0 и 1. 2. Четвертое *ЧП*, полученное при умножении на цифру Е≠1, начинается с цифры Е; следовательно, первая цифра множимого Л=1. 3. Остальные *ЧП* начинаются с цифр, отличных от соответствующих цифр множителя, на которые производилось умножение. Это означает, что Е — наименьшая из цифр множителя, в частности Е < И. Отсюда следует, что Е = 2, иначе множимое превысило бы $14\cdot10^4$, и четвертое *ЧП* начиналось бы не с буквы Е. 4. И (вторая цифра множимого) меньше пяти, иначе бы четвертое *ЧП* начиналось бы не с цифры 2. 5. Из сопоставления первых цифр *ЧП* с соответствующими цифрами множителя следует: 5_1. Т > И; 5_2. В > Т; 5_3. К > В, 5_4. А > К. 6. Так как А (младшая цифра второго *ЧП*) получена при умножении А на К, а К ≠ 1, получаем А ≠ 7 и А ≠ 9. Кроме того, А не может быть и нулем. Таким образом, остается единственное решение: А = 8 и К = 6. 7. Учитывая 5_3, получаем В = 5. 8. Учитывая 5_2, находим Т = 4. 9. Учитывая 5_1, находим И = 3. 10. С (первая цифра результата) получена сложением К с переносом из предыдущего разряда, который не может быть больше 1, отсюда С = К + 1 = 7. 11. Все цифры сомножителей найдены. Это позволяет найти значения оставшихся двух букв: О = 9 и Р = 0.

Расшифрованные слова: ВОЛК ЛИСА КРОЛИК КРОТ ОСЕЛ ВОЛ КОРОВА КИТ СОВА АИСТ КЛЕСТ СОРОКА ТЕТЕРЕВ СОКОЛ.

2. После слова ЕКОНТРГИ Лингвист напишет слово ТИГРЕНОК; после ИЕНГТКОР — слово ИЕНГОРТК, после ИГКОНТЕР — слово ИРГЕТНОК. Последним словом в словаре, разумеется, будет слово КОНТЕРГИ.

3. 3 табуретки и 4 стула. Указание. Нужно решить в натуральных числах такое уравнение: $5x + 6y = 39$.

Таблица

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
А	6	2	3	5_4	5_4	5_4	5_4	6	6	6
В	1	1	3	5_2	5_2	7	6	7	6	7
Е	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3
И	1	1	3	9	8	4	4	4	4	4
К	1	1	3	5_3	5_3	5_3	6	6	6	6
Л	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
О	11	2	3	9	8	7	6	10	6	11
Р	11	2	3	9	8	7	6	10	6	11
С	10	2	3	9	8	7	6	10	6	10
Т	1	1	3	5_1	8	7	6	8	6	8

4. Нужно рассмотреть три случая:

а) Эскалатор неподвижен. Тогда оба человека насчитывают одинаковое число ступеней.

б) Эскалатор движется, люди бегут по движению. В этом случае больше ступеней насчитывает бегущий быстрее.

в) Эскалатор движется, люди бегут против движения. В этом случае больше ступеней насчитывает отстающий (если, например, он движется со скоростью, равной по абсолютной величине скорости эскалатора, то он, оставаясь на одном месте, насчитывает бесконечно много ступеней).

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, С. Лухин, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова, В. Чернов, В. Шептовицкий

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Боровина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 29/I—79 г.
Подписано в печать 13/III—79 г.
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,86. Т-06181
Цена 30 коп. Заказ 159 Тираж 286 718 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

ПЕРВЫЕ СОВЕТСКИЕ «ЛУННИКИ»

Двадцать лет назад, 2 января 1959 г., в Советском Союзе был осуществлен успешный запуск космической ракеты к Луне. Впервые в истории человечества был создан летательный аппарат, превысивший вторую космическую скорость. Последняя ступень ракеты весом 1472 кг пролетела вблизи Луны и стала первой искусственной планетой солнечной системы. Научная аппаратура, установленная на ней, исследовала корпускулярное излучение Солнца, космические лучи, метеорные частицы и магнитные поля в межпланетном пространстве.

12 сентября 1959 г. к Луне стартовала вторая советская космическая ракета. 14 сентября она достигла поверхности Луны. Во время полета была получена ценная научная информация о физических явлениях, происходящих в ближнем космосе и окололунном пространстве.

4 октября 1959 г. третья советская космическая ракета направилась к Луне. 7 октября ее научная аппаратура в течение 40 минут фотографировала обратную сторону Луны, невидимую с Земли. Обработка фотопленок была автоматически проведена на борту ракеты, а полученные изображения лунной поверхности передавались на Землю при помощи специальной радиотехнической системы. Так было положено начало картографированию Луны.

Эти выдающиеся события нашли свое отражение в отечественной и зарубежной филателии. В Советском Союзе запуск первой и второй ракет к Луне был отмечен выпуском серий, состоящих из двух марок. Третьей ракете были посвящены три марки. Все они в хронологической последовательности изображены на этой странице. Здесь же помещены и марки социалистических стран, рассказывающие об этих полетах.

В. Рудов

Цена 30 коп.

Индекс 70465

На второй странице обложки «Кванта» № 1 была помещена фотография модели многогранника, состоящего из десяти симметрично расположенных пересекающихся кубов. «Летающая тарелка» на второй странице обложки этого номера журнала получена продолжением его граней. На эпюре внизу показаны грани этой «тарелки». Постарайтесь отыскать на эпюре грани еще одной «тарелки», показанной ниже. (О том, как пользоваться эпюрами, см. «Квант» № 3, с. 50)

В. Гамаюнов